1. Esercizi prima settimana

Esercizio 1.1. Sia A un dominio. Per un A modulo M si definisce

$$\operatorname{Tors} M = \{m \in M \ : \ \text{esiste } a \neq 0 \text{ tale che } am = 0\}.$$

Se $\operatorname{Tors} M = 0$ allora M si dice senza torsione. Dimostrare che l'essere senza torsione è una proprietà locale in senso forte.

Esercizio 1.2. Sia A noetheriano, M un modulo finitamente generato e S una parte moltiplicativa di A. Si dimostri che per ogni modulo N,

$$S^{-1}\operatorname{Hom}_A(M, N) \simeq \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N).$$

Esercizio 1.3. Si dimostri che un A-modulo M è piatto se e solo per ogni ideale I di A la mappa

$$I \otimes M \longrightarrow M \qquad a \otimes m \mapsto a\, m$$

è iniettiva.

Esercizio 1.4. Mostrare che la proprietà di essere noetheriano per un anello non è un fatto locale esibendo un anello non noetheriano le cui localizzazioni negli ideali primi sono tutte noetheriane.

Esercizio 1.5. Sia $f : \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ di gruppi abeliani e tale che $f(e_i) = 0$ per ogni i. Allora $f = 0$.

Esercizio 1.6. Si dimostri che $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ non è un modulo libero.

Esercizio 1.7. Si dimostri che gli insiemi $(\mathbb{k}^n)_f$ al variare di f tra i polinomi sono una base della topologia di Zariski.

Esercizio 1.8. Si dimostri che $\mathbb{k}^n$ con la topologia di Zariski è compatto.

2. Esercizi seconda settimana

Esercizio 2.1. Sia $\mathbb{k}$ un campo. Dimostrare che $A = \mathbb{k}[X, Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua normalizzazione (cioè la chiusura integrale di A nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 2.2. Sia A un anello, I un ideale di A e $f \in A$ e $X = \operatorname{Spec} A$. I seguenti spazi tologici sono omeomorfi:

(1) $\operatorname{Spec} A \simeq \operatorname{Spec} A/\sqrt{0}$;
(2) $\operatorname{Spec} A/I \simeq V(I) \subset \operatorname{Spec} A$;
(3) $\operatorname{Spec} A_f \simeq X_f$.

Esercizio 2.3. Sia A un dominio. Dimostrare che la proprietà di essere normale è locale in senso forte.

Esercizio 2.4. Sia $\operatorname{Spec} A$ sconnesso. Si dimostri che esistono due anelli unitari non banali B e C tali che $A \simeq B \times C$.

Esercizio 2.5. Sia A noetheriano, I un ideale di A e $a \in A$. Dimostrare che $a \in I$ se e solo se $a_{\mathfrak{p}} \in I_{\mathfrak{p}}$ per ogni $\mathfrak{p}$ associato ad I.

Esercizio 2.6. Sia M un A modulo piatto e sia

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una successione esatta. Si dimostri che per ogni modulo N, la successione

$$0 \longrightarrow N \otimes X \longrightarrow N \otimes Y \longrightarrow N \otimes M \longrightarrow 0$$

è esatta.

Esercizio 2.7. Sia $A \subset B$ una estensione di anelli.

a) Se J un ideale di B e $A \subset B$ è intera allora $A/J^c \subset B/J$ è intera.
b) Se S una parte moltiplicativa di A allora

$$\overline{S^{-1}A}^{S^{-1}B} = S^{-1}\overline{A}^{B}.$$

Esercizio 2.8. Sia A un dominio normale, I un suo ideale, K il campo dei quozienti di A e $K \subset L$ una estensione algebrica di campi. Sia $x \in L$ e sia $\mu_x = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ il suo polinomio minimo. Allora x è intero su I se e solo se $a_1, \ldots, a_n \in \sqrt{I}$.

Esercizio 2.9. Sia E un campo non necessariamente algebricamente chiuso e sia $E \subset A$ con A finitamente generato su E. Si dimostri che per ogni ideale I di A vale

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I \text{ } massimale} \mathfrak{m}.$$

Esercizio 2.10. Questo esercizio risponde ad una domanda sull'esercizio 1.2. Sia A un anello commutativo con 1 e sia M un A modulo finitamente generato. Si dimostri che la mappa naturale

$$S^{-1} \operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$

è iniettiva. Si dia un esempio nel quale tale mappa non è un isomorfismo.

3. Esercizi terza settimana

Esercizio 3.1. Sia $\Bbbk$ un campo e sia $A = \Bbbk[x] \times \Bbbk[y, z]$. Si esibiscano due insiemi massimali di elementi di A algebricamente indipendenti su $\Bbbk$ di cardinalità diversa.

Esercizio 3.2. Si calcoli la dimensione di $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 3.3. Sia $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]/(f)$ con f polinomio non nullo, se ne calcoli la dimensione.

Esercizio 3.4. Sia A un anello. Se $x \in A$ poniamo $S_x = x^{\mathbb{N}}(1 + Ax)$ e $A_{\{x\}} = S_x^{-1}A$. Si dimostri che A ha dimensione minore o uguale a ℓ se e solo se per ogni x, l'anello $A_{\{x\}}$ ha dimensione minore o uguale a $\ell - 1$.

Esercizio 3.5. Sia $A \subset B$ una estensione intera, $\Bbbk$ un campo algebricamente chiuso e $f : A \longrightarrow \Bbbk$ un morfismo di anelli. Dimostrare che f si può estendere a tutto B.

Esercizio 3.6. Dimostrare che $\Bbbk((t))$ non è algebrico su $\Bbbk(t)$.

Esercizio 3.7. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 = x^3 - 1)$ e sia $M = \mathfrak{m}_{(0,0)}$. Si dimostri che M è piatto.

Esercizio 3.8. Si dimostri che il modulo dell'esercizio precedente non è libero.

Esercizio 3.9. Si dimostri che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going down. [Siano $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ primi di A e sia $\mathfrak{q}_2$ un primo di $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_1$ e sia I l'estensione di $\mathfrak{p}_1$ in B. Si mostri preliminarmente che $A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/I$ è piatta e se ne deduca che è iniettiva.]

Esercizio 3.10. Sia $A \subset B$ una estensione di anelli. E sia C la chiusura integrate di A in B. Si dimostri che la chiusura integrale di $A[t]$ in $B[t]$ è uguale a $C[t]$. In particolare se A è un dominio normale lo è anche $A[t]$. Potrebbe essere utile seguire i seguenti passi

(1) Se R è un anello e f è un polinomio monico a coefficienti in R allora esiste una estensione $R \subset S$ tale che f si spezza come prodotto di fattori lilneari monici in $S[t]$
(2) se $f, g \in B[t]$ sono monici e $fg \in C[t]$ allora $f, g \in C[t]$.
(3) Osservare che se f è intero su $A[t]$ allora lo è anche $f + t^N$.

4. Esercizi quarta settimana

Per martedì 30 ottobre consegnare: l'esercizio 2.6, il 3.4.
Consegnare inoltre due esercizi a scelta tra 2.5, 2.9, 2.10, 3.5, 3.6, 3.8, 3.9, 3.10, 4.1, 4.3, 4.4.
Consegnare due esercizi a scelta tra 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.11, 4.12.

Esercizio 4.1. Sia v una valutazione di un campo K. Dimostrare che

a) $(A_v, \mathfrak{m}_v)$ è un anello locale
b) $x \in A_v^*$ se e solo se $x \neq 0$ e $v(x) = 0$
c) A_v è un dominio normale.

Se inoltre v è discreta dimostrare che

i) A_v è noetheriano
ii) ogni ideale di A_v è principale
iii) $\dim A_v = 1$
iv) esiste $p \in A_v$ tale che v è un multiplo di v_p.

Esercizio 4.2. Sia $\Bbbk$ un campo e sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata. Si dimostri che A è artiniana se e solo se $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

Esercizio 4.3. Sia A un anello locale noetheriano e sia M un A-modulo finitamente generato piatto. Dimostrare che M è libero.

Esercizio 4.4. Fare un esempio di una estensione di $\mathbb{C}$-algebre finitamente generate $A \subset B$ (iniettiva) tale che $\operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$ sia chiusa ma B non sia intera su A.

4.0.1. *Azione del gruppo di Galois.* Negli esercizi che seguono A è un dominio normale e K è il suo campo dei quozienti. L è una estensione finita di K, normale e B è la chiusura intera di A in L e G è il gruppo di Galois di L su K. Tranne che nell'esercizio 4.12 assumeremo che l'estensione sia di Galois. Inoltre $Y = \operatorname{Spec} B$ e $X = \operatorname{Spec} A$ e $\varphi : Y \longrightarrow X$ è la mappa indotta dall'inclusione di A in B. Inoltre $\mathfrak{p}$ è un primo di A e $\mathfrak{q}$ è un primo di B sopra $\mathfrak{p}$.

Esercizio 4.5. Fare un esempio in cui l'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ non sia separabile.

Esercizio 4.6. Sia $A = \mathbb{F}_p[x]$ con p primo dispari. Sia $L = \mathbb{F}_p(x)[y]/(y^2 = x)$. Sia $\Bbbk$ la chiusura algebrica di $\mathbb{F}_p$. Sia G il gruppo di Galois di $\Bbbk$ su $\mathbb{F}_p$.
(1) Esibire una bigezione naturale tra $\operatorname{Max} A$ e $\Bbbk/G$.
(2) Determinare B.
(3) Esibire una bigezione naturale tra $\operatorname{Max} B$ e $\{(\alpha, \beta) \in \Bbbk^2 : \alpha = \beta^2\}/G$ dove G agisce diagonalmente su $\Bbbk^2$
(4) Descrivere la mappa $\operatorname{Max} B \longrightarrow \operatorname{Max} A$ in termini delle identificazioni costruite.
(5) Determinare la cardinalità delle fibre $Y_\mathfrak{p}$ al variare di $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A)$.
(6) Determinare l'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ al variare di $\mathfrak{p} \in \operatorname{Max}(A)$.

Esercizio 4.7. Supponiamo che sia $B = A[\beta]$ e sia f il polinomio minimo di β. Supponiamo che la riduzione $\bar{f}$ di f modulo $\mathfrak{p}$ abbia radici distinte. Dimostrare che il gruppo di decomposizione $G_\mathfrak{q}$ è isomorfo al gruppo di Galois di $\kappa(\mathfrak{q})$ su $\kappa(\mathfrak{p})$.

Esercizio 4.8. Supponiamo che A sia noetheriano e che B sia finitamente generato come A-modulo. Dimostrare che esistono $\beta \in B$ e $\delta \in A$ tali che
(1) $B_\delta = A_\delta[\beta]$,
(2) l'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ sia separabile per ogni $\mathfrak{p} \in X_\delta$.

Esercizio 4.9. Sia A noetheriano di dimensione 1. Dimostrare che l'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ è non separabile solo per un numero finito di $\mathfrak{p} \in X$..

Esercizio 4.10. Sia H un sottogruppo di S_n che contiene un n ciclo, un $n-1$ ciclo e una trasposizione. Allora $H = S_n$. [Questo esercizio non c'entra nulla con quello che stiamo facendo ma serve per fare l'esercizio successivo]

Esercizio 4.11. Dimostrare che esiste una estensione di $\mathbb{Q}$ che ha gruppo di Galois S_n.

Esercizio 4.12. Sia $\Bbbk$ un campo di caratteristica p e sia α un elemento di $\Bbbk[[t]]$ non divisibile per t che non sia algebrico su $\Bbbk(t)$ e sia $\beta = \alpha^p$. Sia $K = \Bbbk(x, \beta)$ e $L = \Bbbk(x, \alpha)$. Sia $A = K \cap \Bbbk[[x]]$ e $B = L \cap \Bbbk[[x]]$.
(1) $[L : K] = p$ e L è il campo dei quozienti di B e K di A;
(2) A e B sono normali e B è la chiusura intergrale di A in L;
(3) per ogni n possiamo scrivere $\beta = f_n + x^{np} g_n$ con f_n un polinomio in x di grado minore di np e $g_n \in A$;
(4) $g_n^{1/p}$ è in B;
(5) B non è un A-modulo finito.

5. Esercizi quinta settimana

Chi vuole può consegnare gli esercizi martedì 6 novembre. In tale caso deve fare anche un esercizio a scelta tra i primi sette di questa settimana.

Esercizio 5.1. Si dimostri il lemma di Yoneda.

Esercizio 5.2. Sia I_n una successione decrescente di sottogruppi del gruppo abeliano A tale che $\cap I_n = 0$. Sia $\hat{A}$ il limite proiettivo dei quozienti A/I_n e $\overline{A}$ il completamento di A rispetto alla topologia definita dagli I_n. Si dimostri che $\overline{A} = \hat{A}$.

Esercizio 5.3. Si descrivano i coprodotti nella categoria degli anelli commutativi unitari.

Esercizio 5.4. Sia $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n$ dove dico che $n > m$ se m divide n e dove la mappa $\mathbb{Z}/(nm) \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ è la proiezione al quoziente. Osserviamo che abbiamo una mappa naturale da $\mathbb{Z}$ a $\hat{\mathbb{Z}}$.

(1) Si dimostri che 1 è un generatore topologico di $\hat{\mathbb{Z}}$ ovvero che il sottogruppo generato da 1 è denso in $\hat{\mathbb{Z}}$.
(2) Si dimostri che $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q, \mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}}$.
(3) Si dimostri che $\hat{\mathbb{Z}} \simeq \prod_{p\ primo} \mathbb{Z}_p$

Esercizio 5.5. Si dimostri che ogni modulo è limite induttivo di moduli liberi.

Funtori aggiunti.

Definizione. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due categorie la categoria prodotto $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ è la categoria che ha come oggetti le coppie (a,b) con a oggetto di $\mathcal{A}$ e b oggetto di $\mathcal{B}$ e morfismi le coppie di morfismi. La composizione è definita componente per componente. In particolare il funtore $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ lo possiamo vedere come un funtore da $\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A}$ in* Set.

Siano $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ due funtori. Si considerino i due funtori H, K da $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B}$ in set definiti da

$$H : (a,b) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(a, G(b)\big) \quad e \quad K : (a,b) \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(F(a), b\big)$$

e similmente sui morfismi. Il funtore F si dice un aggiunto sinistro di G e G un aggiunto destro di F se H e K sono naturalmente equivalenti.

Esercizio 5.6. Sia Ring la categoria degli anelli e sia $G : \mathsf{Ring} \longrightarrow \mathsf{Set}$ il funtore dimenticante. Descrivere un aggiunto sinistro di G.

Esercizio 5.7. Sia F un aggiunto sinistro di G. Dimostrare che F commuta con i colimiti ovvero

$$F\left(\overset{\mathcal{A}}{\varinjlim} L(i)\right) = \overset{\mathcal{B}}{\varinjlim} F\Big(L(i)\Big)$$

e similmente G commuta con i limiti.

Esercizio 5.8. Si faccia un esempio di un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ tale che $\bigcap \mathfrak{m}^n = 0$.

Esercizio 5.9. Siano M un modulo noetheriano e artiniano. Sia $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$ e $L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n$ due serie di Jordan Holder. Dimostrare che esiste una permutazione σ di n tale che $M_i/M_{i-1} \simeq L_{\sigma(i)}/L_{\sigma(i)-1}$.

6. Esercizi sesta settimana

6.1. **Estensioni infinite.** Negli esercizi che seguono vengono fatte alcune osservazioni sul caso della coomologia di Galois nel caso di estensioni infinite. Sia $E \subset F$ una estesione di Galois e Γ il suo gruppo di Galois. Abbiamo visto che

$$\Gamma = \varprojlim_{L \supset E} \mathrm{Gal}(L, E)$$

dove il limite è fatto sulle estensioni di Galois finite di E. Se L è una tale estensione indico con Γ_L il gruppo di Galois di L su E e con Σ_L il gruppo di Galois di F su L, quindi $\Gamma_L = \Gamma/\Sigma_L$. Ricordiamo anche Γ è munito di una topologia nel quale un s.f.i. dell'identità è dato dai gruppi Σ_L.

Il risultato del seguente esercizio si deduce da quello fatto in classe nel caso di estensioni finite

Esercizio 6.1. Sia V un F spazio vettoriale. Dare una E struttura è equivalente a dare una azione di Γ su V sesquilineare (ovvero $\gamma \cdot (\lambda\, v) = \gamma(\lambda)\, \gamma \cdot v$) e continua per la topologia discreta su V (ovvero lo stabilizzatore di ogni punto contiente un Σ_L per qualche L come sopra.)

Sia G sul quale agisce Γ e supponiamo che l'azione di Γ sia continua quando muniamo G della topologia discreta, ovvero

$$G = \bigcup G^{\Sigma_L}$$

dove l'unione è sulle estensioni di Galois finite di E. Nel sequito indicherò con L una estensione di Galois di E finita e quando scriverò una unione o un limite su L intenderò che varia tra tutte le estensioni di Galois finite di E. Definiamo

$$Z^1_{cont}(\Gamma, G) = \{c : \Gamma \longrightarrow G \,:\, c \in Z^1(\Gamma, G) \text{ e } c \text{ è continua}\}$$

e poniamo $H^1_{cont}(\Gamma, G) = Z^1_{cont}(\Gamma, G)/\sim$ dove la relazione di equivalenza è la stessa del caso di estensioni finite.

Il seguente esercizio riduce il calcolo della coomologia continua al caso finito.

Esercizio 6.2. Con le notazioni sopra verificare che

(1) l'azione di Γ su G induce per restrizione una azione di Γ_L su G^{Σ_L} e questo determina una inclusione di $Z^1(\Gamma_L, G^{\Sigma_L})$ in $Z^1_{cont}(\Gamma, G)$.
(2) $Z^1_{cont}(\Gamma, G) = \bigcup_L Z^1(\Gamma_L, G^{\Sigma_L})$
(3) l'inclusione del punto (1) induce una inclusione di $H^1(\Gamma_L, G^{\Sigma_L})$ in $H^1_{cont}(\Gamma, G)$
(4) $H^1_{cont}(\Gamma, G) = \bigcup_L H^1(\Gamma_L, G^{\Sigma_L})$

Qualche attenzione è tuttavia necessaria in generale.

Esercizio 6.3. Fare un esempio di una E algebra A_0 tale che l'azione di Γ su $\mathrm{Aut}_F(F \otimes A_0)$ non sia continua.

Esercizio 6.4. Dimostrare che se A_0 è una E-algebra finitamente generata allora l'azione di Γ su $G = \mathrm{Aut}_F(F \otimes A_0)$ è continua e le E-forme di $A = F \otimes_E A_0$ sono in bigezione con $H^1_{cont}(\Gamma, G)$.

Esercizio 6.5. Sia X sul quale agisce il gruppo G in modo transitivo. Supponiamo che Γ agisca in modo compatibile su G e su X. Supponiamo inoltre che l'azione di Γ e X sia continua se muniamo G e X della topologia discreta. Sia $x_0 \in X^\Gamma$ e sia H il suo stabilizzatore. Se $H^1_{cont}(\Gamma, G) = 1$ allora c'è una corrispondenza tra le G^Γ orbite in X^Γ e $H^1_{cont}(\Gamma, H)$.

Nota bene: quando si parla di gruppi di Galois il pedice "cont" non si scrive quasi mai.

6.2. **Alcuni esempi di coomologia di Galois.** Con le notazioni introdotte sopra

Esercizio 6.6. Assumiamo la caratteristica del campo sia diversa da 2. Il gruppo simplettico $Sp(2n, F)$ è il seguente sottogruppo simplettico stabile per l'azione di Γ:

$$Sp(2n, F) = \{g \in GL(2n, F) \, : \, g \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix} \right) g^t = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix} \right) \}.$$

Si dimostri che $H^1(\Gamma, Sp(2n, F)) = 1$.

Esercizio 6.7. Sia $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$. Si calcoli la cardinalità di $H^1(\Gamma, O(n, \mathbb{C}))$. $O(n)$ è il gruppo delle matrici X tali che $X^t X = I$.

Esercizio 6.8. Si dimostri che $H^1(\Gamma, F) = 1$.

6.3. **Categorie abeliane.** Svolgere i seguenti esercizi senza usare il teorema di immersione delle categorie abeliane.

Esercizio 6.9. Dimostrare che in una categoria additiva

(1) un morfismo è un isomorfismo se e solo se nucleo e conucleo sono zero,
(2) un nucleo è sempre un monomorfismo
(3) composizione di monomorfismi è un monomorfismo
(4) se $\beta\alpha$ è un monomorfismo allora α è un monomorfismo

Esercizio 6.10. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore tra due categorie additive. Allora $F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi)$ per ogni coppia di morfismi $\varphi, \psi : x \longrightarrow y$ se e solo se F conserva i coprodotti.

Esercizio 6.11. Supponiamo sia dato il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd}
x_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & x_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & x_5 \arrow[d, "f_5"] \\
y_3 \arrow[r, "\beta_3"] & x_4 \arrow[r, "\beta_4"] & y_5
\end{tikzcd}$$

Supponendo che le righe siano esatte, che f_4 sia un isomorfismo e che f_5 sia un monomorfismo, dimostrare che $\operatorname{coker} \alpha_3 \simeq \operatorname{coker} \beta_3$.

Dedurre il lemma dei 5 con le ipotesi f_1 epimorfismo e f_5 monomorfismo, dal caso analizzato in classe.

7. Esercizi settima settimana

Per martedì 27 novembre consegnare
1 esercizio a scelta tra 6.2 e 6.4
1 esercizio a scelta tra 6.8 e 7.1
L'esercizio 6.10 (consegnare solo la dimostrazione dell'implicazione "se")
1 esercizio a scelta tra 7.4, 7.5, 7.6 e 7.7.

Per la soluzione di un esercizio potete utilizzare tutto quello che è stato fatto in classe e i risultati degli esercizi precedenti.

Esercizio 7.1. Consideriamo l'azione per coniugio di $SL(n, \mathbb{F}_q)$ sulle matrici $n \times n$. In particolare questa azione preserva lo spazio delle matrici nilpotenti di rango $n-1$. Quante sono le sue orbite?

Esercizio 7.2. Si completi la verifica delle proprietà di aggiunzione dei funtori di induzione e coinduzione spiegate in classe.

Esercizio 7.3. Si completi la verifica della successione esatta associata ad una estensione di Γ-gruppi:

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow K \longrightarrow 1$$

con H contenuto nel centro di G.

Esercizio 7.4. Sia H un sottogruppo di G e sia N un H modulo. Definiamo

$$\tilde{N} = \{f : G \longrightarrow N \,:\, f(gh^{-1}) = h \cdot f(g),\ \forall g \in G \text{ e } h \in H\}$$

che muniamo della seguente azione di G: $g \cdot f(x) = f(g^{-1}x)$. Si dimostri che $\tilde{N} \simeq \mathrm{coInd}_H^G(N)$

Esercizio 7.5. Sia H un sottogruppo di G e sia N un H modulo. Definiamo $\tilde{N}$ come nell'esercizio precedente e definiamo

$$\hat{N} = \{f \in \tilde{N} \,:\, f \neq 0 \text{ solo su un numero finito di classi laterali in } G/H\}.$$

Si dimostri che $\hat{N} \simeq \mathrm{Ind}_H^G(N)$.

Esercizio 7.6. Sia G un gruppo libero con n generatori (non abeliano) e sia M un R-G-modulo. Si dimostri che

$$H^q(G, M) = 0 \qquad \text{per } q \geqslant 2.$$

[Si costruisca una risoluzione di R più corta di quella fatta in classe]

Esercizio 7.7. Sia $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si consideri l'R-G-modulo banale R. Calcolare $H^q(G, R)$ al variare di q.

Esercizio 7.8 (Hilbert 90 moltiplicativo)**.** Sia E un campo di caratteristica p e si supponga che n sia un numero primo con p (se p diverso da zero) o che p sia zero. Si supponga inoltre che E contenga tutte le radici n-esime di 1. Sia $F \supset E$ una estensione di Galois con gruppo di Galois ciclico di ordine n. Si dimostri che esiste $a \in E$ tale che $F = E[\sqrt[n]{a}]$ utilizzando che $H^1(F^*) = 1$. (considerare il cociclo $[i] \mapsto \zeta_n^i$).

Esercizio 7.9 (Hilbert 90 additivo)**.** Sia p diverso da zero. Sia $F \supset E$ una estensione di Galois con gruppo di Galois di ordine p. Si dimostri che esiste $b \in E$ tale che $F = E[b]$ e $b^p - b \in E$.
(si usi $H^1(F) = 0$)

8. Esercizi 1 dicembre

Per martedì 11 dicembre consegnare
1 esercizio a scelta tra 8.3, 8.4.
1 esercizio a scelta tra 8.6, 8.7.
1 esercizio a scelta tra 8.8, 8.9.
Sono tre invece di due ma spero siano più semplici di quelli che volevo dare inizialmente.

Esercizio 8.1. Si determini $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$.

Esercizio 8.2. Sia A una $\mathbb{C}$-algebra e sia V un A modulo irriducibile.
(1) se $\dim_{\mathbb{C}} V$ è finita allora $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$;
(2) se $\dim_{\mathbb{C}} V$ è al più numerabile allora $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$.

Esercizio 8.3. Sia H un sottogruppo normale di G. Sia A un G modulo e sia $B = \mathrm{coInd}_1^G A$.
Si dimostri che
(1) $H^i(H, B) = 0$ per ogni $i > 0$ [dimostrare che B come H modulo è un modulo coindotto];
(2) $H^i(G/H, B^H) = 0$ per ogni $i > 0$ [dimostrare che B^H come G/H modulo è un modulo coindotto];

Esercizio 8.4. Sia G un gruppo, H un suo sottogruppo normale e A un G modulo tale che $H^i(A, H) = 0$ per $i = 1, \ldots, q-1$ con $q \geqslant 2$. Si dimostri che la successione

$$0 \longrightarrow H^q(G/H, A^H) \xrightarrow{Inf} H^q(G, A) \xrightarrow{Res} H^q(H, A)$$

è esatta.

Esercizio 8.5. Sia $E = \mathbb{C}((t))$. Dimostrare che ogni estensione finita di E è della forma $\mathbb{C}((s))$ con $s^n = t$. [Utilizzare quello che si è fatto per i campi completi]

Esercizio 8.6. Sia $E = \mathbb{C}((t))$. Si calcoli il gruppo di Brauer di E.

Esercizio 8.7. Sia E un campo tale che ogni estensione di Galois finita ha gruppo risolubile. Dimostrare che ogni estensione di Galois finita di K ha gruppo di Brauer banale se e solo per ogni estensione finita $E \subset L \subset M$ con $L \subset M$ di Galois la norma $N : M^* \longrightarrow L^*$ è surgettiva.

Algebre di quaternioni. Sia E un campo di caratteristica diversa da 2 e siano $a, b \in E^*$. L'algebra $\mathbb{H}(a, b)$ è la E-algebra con base $1, i, j, k$ e prodotto E-bilineare definito dal fatto che 1 è l'unità di $\mathbb{H}(a, b)$ e dalle equazioni

$$ij = -ji = k \qquad i^2 = a \qquad j^2 = b \qquad ik = -ki = aj \qquad kj = -jk = bi \qquad k^2 = -ab.$$

Questo prodotto definisce una struttura di algebra associativa su $\mathbb{H}(a, b)$.

Esercizio 8.8. Si dimostri che se a è un quadrato allora $\mathbb{H}(a, b) \simeq \mathsf{Mat}_{2\times 2}(E)$. Se ne deduca che ogni tale algebra è semplice (anche quando a non è un quadrato).

Esercizio 8.9. Se a non è un quadrato in E, si descriva un campo di spezzamento F per $\mathbb{H}(a, b)$ di grado 2 su E e sia $\Gamma = \mathrm{Gal}(F, E)$. Si calcolino l'elemento di $H^1(\Gamma, PGL(2, F))$ e l'elemento in $H^2(\Gamma, F^*)$ associati a $\mathbb{H}(a, b)$.

Esercizio 8.10. Si deduca dall'esercizio precedente che $\mathbb{H}(a, b) \simeq \mathsf{Mat}_{2\times 2}$ se e solo se la conica $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$ ha soluzioni non banali in E. Si dimostri inoltre che se $\mathbb{H}(a, b)$ e $\mathbb{H}(a, c)$ sono isomorfe allora le forme quadratiche $ax^2 + by^2 - abz^2$ e $ax^2 + cy^2 - acz^2$ sono equivalenti.

Questi tre sercizi hanno sicuramente moltissimi modi di essere svolti, svolgendoli seguendo la traccia indicata sopra secondo me è un ottimo modo per rivedere in un esempio piccolo e nel quale e‘ possibile fare i calcoli esplicitamente quello che abbiamo fatto questa settimana.

Varietà di Severi-Brauer. I due esercizi che seguono prevedono la conoscenza dello spazio proiettivo e della grassmanniana, non solo come insiemi ma come varietà.

Sia $E \subset F$ una estensione finita di Galois congruppo di Galois Γ.

Il gruppo $PGL(n, F)$ non è solo il gruppo degli automorfismi delle matrici $n \times n$ ma anche dello spazio proiettivo $n - 1$ dimensionale. C'è quindi una corrispondenza tra le E forme dello spazio proiettivo $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{F})$ e $H^1(\Gamma, PGL(n, F))$.

Una varietà X definita su E si dice una varietà di Severi-Brauer se è una E forma di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$ per qualche estensione di finita di Galois di E.

Esercizio 8.11. Classificare le forme reali di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e le forme reali di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

Per quanto detto sopra c'è una corrispondenza tra le E-forme di $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$ e le E-forme di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$. La corrispondenza è fatta così. Sia A una E-forma di $\mathsf{Mat}_{n\times n}(F)$. Sia $Y = Gr(n, A)$ la E-varietà degli spazi n dimensionali in A e sia X la sottovarietà di Y le cui equazioni sono date da imporre le condizioni che il sottospazio n-dimensionale è un ideale di A. Allora X è una E-forma di $\mathbb{P}^{n-1}(F)$.

Esercizio 8.12. Esplicitare questa costruzione nei casi dell'esercizio precedente.

9. Esercizi 11 dicembre 2018

Per venerdì 21 dicembre consegnare
uno a scelta tra 9.1 o 9.2.
uno a scelta tra 9.3 o 9.4.
uno a scelta tra 9.5 e 9.6.

Esercizio 9.1. Sia Γ una gruppo di Galois e sia $\mathcal{C}$ la categoria dei moduli continui (con le notazioni usate in precedenza dei moduli M che sono l'unione degli M^{Σ_L}). Si dimostri che $\mathcal{C}$ ha abbastanza iniettivi.

Esercizio 9.2. Siano I^*, J^* due complessi di A-moduli limitati inferiormente con I^n, J^n iniettivo per ogni n. Sia $\varphi : I^* \longrightarrow J^*$ un quasi isomorfismo. Si dimostri che è un isomorfismo nella categoria omotopica.

Successioni di complessi che spezzano grado per grado. Una successione esatta corta di complessi di A-moduli

$$0 \longrightarrow X^* \xrightarrow{\varphi} Y^* \xrightarrow{\psi} Z^* \longrightarrow 0$$

si dice che spezza grado per grado se esistono delle mappe $\sigma^n : Z^n \longrightarrow Y^n$ tali che $\psi^n \sigma^n = id_{Z^n}$. In tal caso esistono anche delle mappe $\rho^n : Y^n \longrightarrow X^n$ tali che $\rho^n \varphi^n = id_{X^n}$ e $\rho^n \sigma^n = 0$.

Se ho un complesso come sopra che spezza grado per grado posso costruire un triangolo

$$X^* \xrightarrow{\varphi} Y^* \xrightarrow{\psi} Z^* \xrightarrow{\chi} X^*[1]$$

dove $\chi^n = \rho^{n+1}\, \partial^n_Y\, \sigma^n$.

Esercizio 9.3. Si dimostri che il triangolo associato ad una successione esatta corta che spezza grado per grado è distinto.

Un'altra descrizione degli oggetti adatti.

Esercizio 9.4. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore esatto a sinistra tra due categorie abeliane. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di oggetti di $\mathcal{A}$ con queste due proprietà:

- per ogni oggetto x di $\mathcal{A}$ esiste $y \in \mathcal{F}$ e un monomorfismo $\varphi : x \longrightarrow y$.
- per ogni successione esatta corta $0 \longrightarrow a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow 0$ con $a, b \in \mathcal{F}$ si ha $c \in \mathcal{F}$ e $0 \longrightarrow Fa \longrightarrow Fb \longrightarrow Fc \longrightarrow 0$ è esatta.

Allora per ogni complesso limitato dal basso a^* con $a^n \in \mathcal{F}$ per ogni n si ha un quasi isomorfismo $F(a^*) \longrightarrow RF(a^*)$.

Esercizio 9.5. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]$, $\mathfrak{m} = (x, y)$ e $M = A/\mathfrak{m}$.

(1) Calcolare $\mathrm{Ext}^i(A/(f), M)$ e $\mathrm{Tor}_i(A/(f), M)$ al variare di $i \geqslant 0$ e di $f \in A$
(2) Calcolare $\mathrm{Ext}^i(M, A/(x))$

Esercizio 9.6. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^3)$ e sia $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A generato da x, y e $M = A/\mathfrak{m}$. Calcolare $\mathrm{Tor}_i(M, M)$ per $i \geqslant 0$.

Esercizio 9.7. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale noetheriano e sia $\mathbb{k} = A/\mathfrak{m}$. Dimostrare che

(1) per ogni A modulo N si ha $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{Tor}_i(\mathbb{k}, N) = 0$ per ogni i. In particolare $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{k}, N)$ ha la struttura di un $\mathbb{k}$-spazio vettoriale.
(2) per ogni A modulo N si ha $\mathfrak{m} \cdot \mathrm{Ext}_i(\mathbb{k}, N) = \mathfrak{m} \cdot \mathrm{Ext}(N, \mathbb{k}) = 0$ per ogni i. In particolare $\mathrm{Ext}_i(\mathbb{k}, N)$ e $\mathrm{Ext}(N, \mathbb{k})$ hanno la struttura di un $\mathbb{k}$-spazio vettoriale.
(3) $\mathrm{Ext}_i(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ e $\mathrm{Tor}_i(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ hanno dimensione finita su $\mathbb{k}$ e $\dim_{\mathbb{k}} \mathrm{Ext}_i(\mathbb{k}, \mathbb{k}) = \dim_{\mathbb{k}} \mathrm{Tor}_i(\mathbb{k}, \mathbb{k})$ per ogni i. [Costruire una risoluzione libera di $\mathbb{k}$ la più piccola possibile usando Nakayama]