Esercizi prima settimana

Esercizio 1. Sia $f : \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ di gruppi abeliani e tale che $f(e_i) = 0$ per ogni i. Allora $f = 0$.

Esercizio 2. Si dimostri che $\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}$ non è un modulo libero.

Esercizio 3. Dimostrare che la piattezza di un modulo è una proprietà locale ovvero che per un A modulo M i seguenti fatti sono equivalenti:

i) M è un A modulo piatto
ii) $M_{\mathfrak{p}}$ è un $A_{\mathfrak{p}}$ modulo piatto per ogni ideale prima $\mathfrak{p}$
iii) $M_{\mathfrak{m}}$ è un $A_{\mathfrak{m}}$ modulo piatto per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$

Esercizio 4. Mostrare che la proprietà di essere noetheriano per un anello non è un fatto locale esibendo un anello non noetheriano le cui localizzazioni negli ideali primi sono tutte notheriane.

Esercizio 5. Dimostrare che la IV formulazione del teorema degli zeri di Hilbert data in classe è equivalente alle precedenti.

Esercizio 6. Sia E un campo non necessariamente algebricamente chiuso e sia $E \subset A$ con A finitamente generato su E. Si dimostri che per ogni ideale I di A vale

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I \text{ } massimale} \mathfrak{m}.$$

(ridursi al caso $A = E[x_1, \ldots, x_n]$ e E algebricamente chiuso).

Esercizio 7. Siano A e B due algebre finitamente generate su un campo algebricamente chiuso e sia A un dominio. Sia $f : A \longrightarrow B$ un morfismo di algebre. Se $f^* : \mathrm{Max}(B) \longrightarrow \mathrm{Max}(A)$ è suriettiva allora f è iniettiva.

Esercizio 8. Mostrare che gli insiemi $V(I)$ costituiscono un sistema di chiusi per $\operatorname{Spec} A$.

Esercizio 9. Si dimostri che $V(I) \simeq \operatorname{Spec} A/I$ come spazio topologico.

Esercizio 10. Sia $X = \operatorname{Spec} A$ e per $f \in A$ sia $X_f = X \smallsetminus V(f)$. Si dimostri che X_f è un sistema fondamentale di aperti di X. Si dimostri che $X_f \simeq \operatorname{Spec} A_f$ come spazio topologico.

Esercizio 11. Sia $X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostri che X è compatto.

Esercizio 12. Uno spazio topologico X si dice riducibile se si può scrivere come l'unione di due chiusi diversi da X. Uno spazio topologico non riducibile si dice irriducibile. Dimostrare che $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{0}$ è un ideale primo.

Esercizio 13. Un punto $\mathfrak{p}$ di $\operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è massimale.

Esercizi seconda settimana

Esercizio 14. Sia $A \subset B$ una estensione di anelli e sia C la chiusura integrale di A in B. Sia S una parte moltiplicativa di A. Allora la chiusura integrale di $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$ è uguale a $S^{-1}C$.

Esercizio 15. Dimostrare che $\Bbbk((t))$ non è algebrico su $\Bbbk(t)$.

Esercizio 16. Fare un esempio di un dominio che sia una estensione intera di $\mathbb{Z}$ che non sia noetheriano.

Esercizio 17. Dimostrare che $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots]$ non è noetheriano.

Esercizio 18. Sia C la normalizzazione di $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots]$. Dimostrare che non è noetheriano.

Esercizio 19. Sia $A \subset B$ una estensione intera, $\Bbbk$ un campo algebricamente chiuso e $f : A \longrightarrow \Bbbk$ un morfismo di anelli. Dimostrare che f si può estendere a tutto B.

Esercizio 20.

a) Sia $A \subset B$ una estensione intera. Si dimostri che f^* è una applicazione chiusa.
b) Sia $f : A \longrightarrow B$ tale che f^* è chiusa. Allora f soddisfa la proprietà del going up.

Esercizio 21. Sia $\Bbbk$ un campo. Dimostrare che $A = \Bbbk[X, Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua chiusura integrale (nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 22. Sia $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso e siano $A = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]/I$ e $B = \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n]/J$. Sappiamo che gli ideali massimali di A e B sono identificati con i punti di $V(I) \subset \mathbb{k}^m$ e $V(J) \subset \mathbb{k}^n$ nel seguente modo se $a \in V(I)$ allora l'ideale massimale corrispondente è $\mathfrak{m}_a = (x_1 - a_1, \dots, x_m - a_m)/I$ e similmente per $b \in V(J)$.

Sia $f : \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m] \longrightarrow \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n]$ un morfismo di anelli tale che $f(\lambda) = \lambda$ per ogni $\lambda in \mathbb{k}$ e tale che $f(I) \subset J$. Quindi f definisce un morfismo al quoziente $\bar{f} : A \longrightarrow B$. Sia inoltre $f(x_i) = F_i \in \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n]$ e definiamo $F : \mathbb{k}^n \longrightarrow \mathbb{k}^m$ mediante $F(b) = (F_1(b), \dots, F_m(b))$. Verificare che

a) $f(p)(b) = p(F(b))$ per ogni $p \in \mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$;
b) $F(V(J)) \subset V(I)$;
c) se $b \in V(J)$ allora $f^*(\mathfrak{m}_b) = \mathfrak{m}_{F(b)}$;

Se H è un ideale di A allora $H = \tilde{H}/I$ con $\tilde{H}$ un ideale di $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_m]$ e definisco $V(H) = V(\tilde{H}) \subset \mathbb{k}^m$ (e similmente possiamo definire $V(K)$ per K un primo di B). Verificare che

d) se H è un ideale di A allora $V(H) \subset V(I)$;
e) se $H = \sqrt{H}$ e $K = \sqrt{K}$ con H, K ideali di A allora $V(H) = V(K)$ se e solo se $H = K$.

Supponiamo adesso che $\bar{f} : A \longrightarrow B$ sia intera e iniettiva. Allora

f) $\bar{f} : A \hookrightarrow B$ è una estensione finita;
g) $F\big(V(J)\big) = V(I)$;
h) $F(V(\mathfrak{q})) = (V(\mathfrak{p}))$ se e solo se $\bar{f}^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ per ogni ideale $\mathfrak{q}$ primo di B e $\mathfrak{p}$ primo di A;
i) fare un controesempio al punto $h)$ nel caso in cui $\bar{f}$ non sia intera.

Esercizio 23. Sia A un dominio normale e sia $A \subset B$ con B dominio una estensione intera. Allora $f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ è aperta.

Più precisamente se $b \in B$ e $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ è il polinomio minimo di b su A si mostri che

$$f^*(Y_b) = \bigcup X_{a_i}.$$

[La notazione per gli aperti Y_b, X_a è quella dell'esercizio 10].

Osservazione sull'esercizio 23. La proprietà del going down e la proprietà di essere aperta sono strettamente collegate. Infatti se f^* è aperta allora vale la proprietà del going down. L'implicazione inversa in generale non vale, se però assumiamo che A e B sono noetheriani e B è una A-algebra finitamente generata allora vale anche l'implicazione inversa.

Esercizi III settimana

Esercizio 24. Sia A un dominio. Si dimostri che i seguenti fatti sono equivalenti

(1) A è normale;
(2) $A_\mathfrak{p}$ è normale per ogni $\mathfrak{p}$ primo;
(3) $A_\mathfrak{m}$ è normale per ogni $\mathfrak{m}$ massimale

Esercizio 25. Sia $f : A \longrightarrow B$, $\varphi = f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$. Sia $\mathfrak{q}$ un primo di B e sia $Y_\mathfrak{q} = \{Q \in Y : Q \subset \mathfrak{q}\}$ (che è omeomorfo a $\operatorname{Spec} B_\mathfrak{q}$). Si dimostri che

$$\varphi(Y_\mathfrak{q}) = \bigcap_{b \notin \mathfrak{q}} \varphi(Y_b).$$

Esercizio 26. Sia $f : A \longrightarrow B$, $\varphi = f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostri che se φ è aperta allora f soddisfa la proprietà del going down.

Esercizio 27. Sia $A \subset B$ una estensione finita di anelli noetheriani. Dimostrare che per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ la cardinalità di $\mathcal{F}_\mathfrak{p} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B : \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ è finita

Esercizio 28. Sia $\mathbb{k}$ un campo infinito e sia A una $\mathbb{k}$-algebra generata da $x_1, \dots, n_n$. Dimostrare che esistono $y_1, \dots, y_m$ algebricamente indipendenti su $\mathbb{k}$ e lineari in $x_1, \dots, x_n$ tali che A è intera su $\mathbb{k}[y_1, \dots, y_m]$. [Procedere in modo molto simile alla dimostrazione del Lemma di Noether fatta in classe ponendo $y_i = x_i + \lambda_i x_1$]

Esercizio 29. Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio irriducibile tale che $f(0, 0) = 0$. Sia A la localizzazione di $\mathbb{C}[x, y]/(f)$ nell'ideale (x, y). Sia f_i la parte omogenea di grado i del polinomio f e sia $f = f_1 + \cdots + f_m$.

a) Si dimostri che se A è integralmente chiuso allora $f_1 \neq 0$
b) Si dimostri che se $f_1 \neq 0$ allora A è integralmente chiuso. [si può supporre $f_1 = x$. Dimostrare che l'ideale massimale di A è (y). Dedurne che A è fattoriale.]

Tenendo conto del fatto che la normalità è una proprietà locale possiamo riformulare questo esercizio dicendo che una curva in $\mathbb{C}^2$ è normale se e solo se è liscia. [In realtà l'ipotesi $\mathbb{C}^2$ non serve]

Esercizio 30. Si dimostri che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going down. [Siano $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ primi di A e sia $\mathfrak{q}_2$ un primo di $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_1$ e sia I l'estensione di $\mathfrak{p}_1$ in B. Si mostri preliminarmente che $A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/I$ è piatta e se ne deduca che è iniettiva.]

Non è sempre vero che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora è aperta ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$) e tantomeno che soddisfa la proprietà del going up (per esempio una loclizzazione in un elemento generale sarà piatta ma non chiusa).

Esercizio 31. Sia $\Bbbk$ un campo e sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata. Si dimostri che A è artiniana se e solo se $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

Definizione. *Un anello si dice irriducibile se il suo radicale è un ideale primo.*

Esercizio 32. Sia A un anello noetheriano e sia $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ con gli A_i irriducibili. Dimostrare che gli A_i sono univocamente determinati a meno di permutazione. Più precisamente se $\varphi : A \longrightarrow B_1 \times \cdots \times B_h$ è un isomorfismo e i B_i sono irriducibili allora $h = k$ e a meno di permutazione $\varphi(A_i) = B_i$.

Anelli di valutazione discreta. Sia K un campo. Una *valutazione* di K è una mappa $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;
- $v(x + y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$;

Inoltre la valutazione si dice *discreta* se la sua immagine è della forma $\mathbb{Z}q$ per qualche $q \in \mathbb{Q}$ diverso da zero.

Data una valutazione di K poniamo

$$A_v = \{0\} \cup \{a \in K^* : v(a) \geqslant 0\} \qquad \mathfrak{m}_v = \{0\} \cup \{a \in K^* : v(a) > 0\}.$$

Un dominio si dice di valutazione discreta se esiste una valutazione discreta v del suo campo dei quozienti tale che $A = A_v$.

Esempio fondamentale. Sia K il campo dei quozienti di un anello fattoriale A, e sia p un primo di A. Se $a \in A$ e $a \neq 0$ definisco

$$v_p(a) = \max\{n : p^n | a\}.$$

v_p si estende a tutto K e definisce una valutazione discreta di K.

Esercizio 33. Sia v una valutazione di K. Dimostrare che

a) $(A_v, \mathfrak{m}_v)$ è un anello locale
b) $x \in A_v^*$ se e solo se $x \neq 0$ e $v(x) = 0$
c) A_v è un dominio normale.

Se inoltre v è discreta dimostrare che

i) A_v è noetheriano
ii) ogni ideale di A_v è principale
iii) $\dim A_v = 1$
iv) esiste $p \in A_v$ tale che v è un multiplo di v_p.

Esercizio 34. Sia $\Bbbk$ un campo di caratteristica p e sia α un elemento di $\Bbbk[[t]]$ non divisibile per t che non sia algebrico su $\Bbbk(t)$ e sia $\beta = \alpha^p$. Sia $K = \Bbbk(x, \beta)$ e $L = \Bbbk(x, \alpha)$. Sia $A = K \cap \Bbbk[[x]]$ e $B = L \cap \Bbbk[[x]]$.

(1) $[L : K] = p$ e L è il campo dei quozienti di B e K di A;
(2) A e B sono normali e B è la chiusura intergrale di A in L;
(3) per ogni possiamo scrivere $\beta = f_n + x^{np} g_n$ con f_n un polinomio in x di grado minore di np e $g_n \in A$;
(4) $g_n^{1/p}$ è in B;
(5) B non è un A-modulo finito.

Esercizi da consegnare entro martedì 25 ottobre

Si deve consegnare la soluzione di 5 esercizi tra i seguenti numeri: 12,18,22 e gli esercizi di questa settimana escluso il 28. Inoltre tutti devono consegnare l'esercizio 22 e chi non ha fatto il corso di teoria algebrica dei numeri deve consegnare l'esercizio 33 mentre chi l'ha fatto non lo può consegnare.

È permesso aiutarsi o consultare dei libri. In questo caso però è importante scrivere chi vi ha aiutato o i libri che avete utilizzato. Non si può però copiare integralmente un esercizio, dopo aver capito la risoluzione si è pregati di riscriverla con parole proprie.

Si possono utilizzare tutti i risultati dimostrati a lezione, e i risultati degli esercizi.

Per quanto riguarda l'esercizio 22, si prega di essere chiari e molto sintetici per i punti $a) - e)$.

Esercizi IV settimana

Esercizio 35. Sia A l'anello delle funzioni C^∞ su $\mathbb{R}$, I l'ideale delle funzioni che si annullano in 0 e $J = \bigcap I^n$. Esibire una funzione che sta in J ma che non è annullata da nessun elemento della forma $(1+f)$ con $f \in I$.

Esercizio 36. Sia A un dominio e sia $a \in A$ un elemento diverso da zero, sia infine K il campo dei quozienti di A. Dimostrare che l'inclusione naturale $A \subset K$ induce una inclusione

$$\frac{A[x,y]}{(x^n y = a)} \subset \frac{K[x,y]}{(x^n y = a)} \simeq K[x^{\pm 1}].$$

In particolare $A[x,y]/(x^n y = a)$ è un dominio.

Esercizio 37. Il seguente esercizio fornisce un controesempio a $I \cdot \bigcap I^n = \bigcap I^n$, (proprietà che abbiamo dimostrato essere vera a lezione per anelli noetheriani come conseguenza del lemma di Artin-Rees).

In alternativa a sviluppare l'esempio costruito sotto, potete cercare un esempio diverso dal mio; magari trovate qualcosa di più semplice e elegante.

Sia $R = \mathbb{C}[u, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, ...]$ l'anello dei polinomi nella variabile u e nelle variabili x_i, y_i con $i \in \mathbb{N}_+$. Sia J l'ideale di R generato da tutti gli elementi $u - x_i^i y_i$ e $\bar{R} = R/J$. Se $f \in R$ indico con $\bar{f}$ la sua immagine in $\bar{R}$. Sia $\bar{I}$ l'ideale di $\bar{R}$ generato dagli elementi $\bar{x}_i$. Infine sia $X = \bigcap \bar{I}^n$. Si dimostri che

i) $\bar{R}$ è un dominio e $\bar{u} \neq 0$;
ii) X è generato da $\bar{u}$;
iii) $X \neq \bar{I} \cdot X$.

Gruppo di decomposizione, gruppo di ramificazione. Sia A un dominio normale, K il suo campo dei quozienti, L una estensione di Galois di K di grado n e gruppo di Gaois G, e sia B la chiusura di A in L. Sia $\mathfrak{p}$ un primo di A e sia $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ l'insieme dei primi di B che intersecati con A danno $\mathfrak{p}$.. Sia $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}_\mathfrak{p}$ il gruppo di decomposizione relativo al primo $\mathfrak{q}$ è lo stabilizzatore di $\mathfrak{q}$:

$$G_\mathfrak{q} = \{\sigma \in G \,:\, \sigma(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}\}$$

e il campo di decomposizione è il campo $L_\mathfrak{q} = L^{G_\mathfrak{q}}$ e pongo $B_\mathfrak{q} = B \cap L_\mathfrak{q}$. Il gruppo di inerzia relativo a $\mathfrak{q}$ è invece il seguente sottogruppo

$$I_\mathfrak{q} = \{\sigma \in G_\mathfrak{q} \,:\, x - \sigma(x) \in \mathfrak{q} \text{ per ogni } x \in B\}.$$

Esercizio 38. Si assuma che $\mathfrak{q}$ e quindi $\mathfrak{p}$ siano ideali massimali. Sia $\mathfrak{r} = \mathfrak{q} \cap B_\mathfrak{q}$ allora

a) se $\mathfrak{q}'$ è un massimale di B e $\mathfrak{q}' \cap B_\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$ allora $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$;
b) $\kappa(\mathfrak{p}) \simeq \kappa(\mathfrak{r})$ (procedere in modo simile a quando abbiamo dimostrato che tutti i primi sono coniugati)

Fissati $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ possiamo considerare l'estensione intera $A/\mathfrak{p} \subset B/\mathfrak{q}$ e l'associata estensione algebrica di campi $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ dove $\kappa(\mathfrak{p})$ è il campo dei quozienti di $A/\mathfrak{p}$ (e analog. per $\mathfrak{q}$). L'azione di $G_\mathfrak{q}$ su B induce una azione di $G_\mathfrak{q}$ su $\kappa(\mathfrak{q})$ che fissa gli elementi di $\kappa(\mathfrak{p})$ e quindi un morfismo di gruppi $\varphi : G_\mathfrak{q} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\kappa(\mathfrak{q})/\kappa(\mathfrak{p}))$.

Esercizio 39. Sempre assumendo che $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{q}$ siano massimali si dimostrino i seguenti fatti

a) L'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ è normale;
b) Assumendo che l'estensione $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ sia separabile dimostrare che il morfismo φ è suriettivo e che il suo nucleo è uguale a $I_\mathfrak{q}$ (ridursi al caso $G = G_\mathfrak{q}$ utilizzando l'esercizio precedente, quindi considerare l'azione del gruppo di Galois su un elemento primitivo)

NOTA BENE: l'ipotesi di massimalità nei due esercizi è inutile ci si può ridurre facilmente al caso massimale. Anche l'ipotesi di separabilità nel punto b) è inutile.

Nel caso in cui $\kappa(\mathfrak{p}) \subset \kappa(\mathfrak{q})$ sia separabile allora si possono definire l'indice di inerzia e quello di ramificazione nel seguente modo (nel caso generale si procede diversamente). Poiché G agisce transitivamente su $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$, al variare di $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}_\mathfrak{p}$ i sottogruppi $G_\mathfrak{q}$ e $I_\mathfrak{q}$ sono tutti coniugati e quindi i seguenti numeri non dipendono da $\mathfrak{q} \in \mathcal{F}_\mathfrak{p}$ ma solo da $\mathfrak{p}$;

$$e_\mathfrak{p} = \text{indice di ramificazione} = \sharp(I_\mathfrak{q})$$
$$f_\mathfrak{p} = \text{indice di inerzia} = \sharp(G_\mathfrak{q})/\sharp(I_\mathfrak{q}).$$

Per quanto detto sopra abbiamo $n = r\, e_\mathfrak{p}\, f_\mathfrak{p}$.

Esercizio 40. Nell'esempio precedente si consideri $A = \mathbb{C}[x]$ e $L = \mathbb{C}(x)[y]/(y^2 = x^3 - x)$. Si calcolino gruppo di decomposizione e gruppo di inerzia al variare del primo $\mathfrak{p}$.

Un esempio di un polinomio con gruppo di Galois S_n.

Esercizio 41. Sia H un sottogruppo di S_n che contiene un n ciclo, un $n-1$ ciclo e una trasposizione. Allora $H = S_n$.

Esercizio 42. Sia n un intero positivo. Si costruiscano o si dimostri che esistono polinomi monici di grado n a coefficienti interi, f_2, f_3, f_5 tale che

i) f_2 è' irriducibile modulo 2;
ii) f_3 modulo 3 è il prodotto di un polinomio irriducibile di grado $n-1$ e di un fattore lineare;
iii) f_5 modulo 5 ha tutte radici distinte, ha un fattore irriducibile di grado 2 e ha tutti gli altri fattori irriducibili di grado dispari.

Esercizio 43. Siano f_2, f_3, f_5 tre polinomi come nell'esercizio precedente e sia $f = 6f_5 + 10f_3 - 15f_2$ Si dimostri che f è irriducibile e che il gruppo di Galois del campo di spezzamento associato è uguale a tutto S_n.

Esercizi V settimana

Esercizio 44. Sia A un dominio noetheriano e sia Π un insieme di elementi primi di A. Sia S l'insieme moltiplicativo generato da Π. Allora se $S^{-1}A$ è fattoriale anche A lo è.

Calcolare le equazioni di una varietà. Introduciamo l'argomento con il seguente esercizio.

Esercizio 45. Sia X il sottoinsieme di $\mathbb{C}^4$ dei punti della forma (t^3, t^2s, ts^2, s^3) con $t, s \in \mathbb{C}$. Si determini l'ideale dei polinomi che svaniscono su X e si dimostri che è generato al minimo da tre polinomi. Si trovino due polinomi omogenei che descrivono lo stesso luogo.

Osservazione 1. Il fatto che una una curva in $\mathbb{P}^3$ possa essere sempre descritto come il luogo degli zeri di due polinomi omogenei è un problema aperto.

Sia $\Bbbk$ algebricamente chiuso e sia $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$. Sia J un ideale di S e sia $X = V(J)$. Con determinare le equazioni di X indendiamo determinare l'ideale I_X di tutti gli elementi di S che si annullano in X. Questo è spesso un problema complicato. Supponiamo di avere un candidato I che noi pensiamo essere uguale a I_X. Questo è equivalente a richiedere che $V(I) = X$ e che $\sqrt{I} = I$ ovvero che il radicale di $A = S/I$ è zero (con radicale qui e altrove intendo sempre il nilradicale ovvero $\sqrt{0}$).

Il primo passo in questa direzione è dato dal seguente esercizio.

Esercizio 46. Sia A un anello noetheriano. Si dimostri che $\sqrt{0} = 0$ se e solo se le seguenti due condizioni sono soddisfatte:

a) ogni primo associato a 0 è minimale;
b) se $\mathfrak{p}$ è minimale allora $A_\mathfrak{p}$ è un campo.

Per semplicità negli esercizi che seguono ci limiteremo al caso in cui X è irriducibile. Ricordiamo che per l'esercizio 12 lo spazio $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se il suo radicale è un ideale primo e osserviamo che per sottovarietà di $\Bbbk^n$ abbiamo la seguente osservazione

Esercizio 47. Sia I un ideale di S allora $V(I) \subset \Bbbk^n$ è irriducibile se e solo se $\operatorname{Spec}(S/I)$ è irriducibile.

Anche assumendo X irriucibile iL risultato dell'esercizio 46 rimane di difficile applicazione. Per descrivere il risultato che ci interessa abbiamo bisogno del criterio Jacobiano e del seguente teorema del quale non conosco una dimostrazione che faccia uso solo degli strumenti a nostra disposizione.

Teorema. *Siano $f_1, \dots, f_k \in S$ tali che f_i non è divisore di zero in $S/(f_1, \dots, f_{i-1})$ allora ogni ideale associato a 0 in $A/(f_1, \dots, f_k)$ è minimale.*

Ricordiamo inoltre il criterio Jacobiano che abbiamo enunciato ma non dimostrato in classe.

Teorema. *Siano $f_1, \dots, f_k \in S$, sia I l'ideale da loro generato, $X = V(I)$ e $A = S/I$. Indichiamo con $Jac = \Big(\partial f_i/x_j\Big)$ Supponiamo che*

i) $\dim A = r$;
ii) X *è irriducibile;*

Sia J l'ideale generato dalle f_i e dai minori $(n-r) \times (n-r)$ di Jac. Sia $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$. Allora $A_{\mathfrak{p}}$ è non regolare se e solo se $\mathfrak{p} \supset J/I$.

Possiamo finalmente enunciare il risultato che ci interessa.

Esercizio 48. Utilizzando il teorema enunciato sopra e il criterio Jacobiano enunciato ma non dimostrato in classe, si dimostri il seguente risultato. Siano $f_1, \dots, f_k \in S$, sia I l'ideale da loro generato, $X = V(I)$ e $A = S/I$. Indichiamo con $Jac = \Big(\partial f_i/x_j\Big)$. Supponiamo che

i) X è irriducibile;
ii) esiste x in X e un minore $k \times k$, M di Jac tale che $M(x) \neq 0$.

Allora

a) $\dim A = n - k$;
b) f_i non è un divisore di zero in $S/(f_1, \dots, f_{i-1})$;
c) $I_X = (f_1, \dots, f_k)$ ovvero A è un dominio.

Esercizio 49. Utilizzando il criterio Jacobiano e il criterio di Serre si dimostri che nelle ipotesi delle esercizio precedente A è normale se e solo se $\dim S/J \leqslant \dim A - 2$.

Come prima applicazione degli esercizi precedenti si svolga il seguente esercizio (un esempio più interessante è illustrato negli esercizi che seguono).

Esercizio 50. Sia $q = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ e sia $p = ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2$ un'altra forma quadratica non multipla di q e sia $I = (p, q) \subset S = \mathbb{C}[x, y, z, w]$. Dimostrare che I è un ideale primo se e solo se a, b, c, d sono distinti a due a due e in tale caso $A = S/I$ è normale.

Le equazioni del cono nilpotente. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{C}$ nilpotenti ovvero delle matrici M tali che $M^n = 0$, questo si chiama il cono nilpotente ed è individuato da condizioni algebriche.

Esercizio 51. Nel caso $n = 2$ dimostrare le equazioni che vengono imponendo $M^2 = 0$ descrivono $\mathcal{N}$ ma non sono tutte le equazioni che determinano $\mathcal{N}$ per esempio $traccia(M) = 0$ non è nell'ideale da loro generato.

Sia Z una matrice che ha come tutti autovalori 0 e ha un unico blocco di Jordan e sia O l'orbita gZg^{-1} con $g \in GL(n)$.

Esercizio 52. Dimostrare che $\overline{O} = \mathcal{N}$ e dedurne che $\mathcal{N}$ è irriducibile.

Esercizio 53. Determinare le equazioni del cono nilpotente.

Esercizio 54. Si dimostri che ogni classe coniugata di matrici ha dimensione pari.

Esercizio 55. Si dimostri che l'anello di coordinate del cono nilpotente è normale.

Esercizi VI settimana

Esercizio 56. Sia $\mathbb{k}$ un campo e sia $A = \mathbb{k}[x] \times \mathbb{k}[y, z]$. Si esibiscano due insiemi massimali di elementi di A algebricamente indipendenti su $\mathbb{k}$ di cardinalità diversa.

Esercizio 57. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x, y)$ e $B = \mathrm{Bl}_I(A)$.

a) si dimostri che $B \simeq \mathbb{C}[x, y, u, v]/(xv - yu)$.
b) si dimostri che l'insieme degli ideali ammissibili massimali di B che intersecano A in (x, y) è in corrispondenza con $\mathbb{P}^1$

c) si dimostri che se $(a,b) \neq (0,0)$ allora c'è un solo ideale ammissibile di B che interseca A in $(x-a, y-b)$.

(si ricorda che se $R = \bigoplus R_n$ è un anello graduato gli ideali ammissibili sono quelli che non contengono R_+)

Esercizio 58. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e sia I l'ideale generato da $1+\sqrt{-5}$ e $1-\sqrt{-5}$. Si calcoli I^{-1} e I^2.

Esercizio 59. Sia $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ e sia p un numero primo. Descrivere tutti gli ideali primi di A e al variare di p, numero primo, dire come si scrive Ap come prodotto di ideali primi di A.

Esercizio 60. Sia $A = \mathbb{C}[x,y,z]/(xy = z^2)$ e sia $\mathfrak{p}$ l'ideale generato da $\bar{x}$ e da $\bar{z}$ e $\mathfrak{m}$ l'ideale generato da $\bar{x}, \bar{y}$ e $\bar{z}$.

a) si dimostri che A è normale e che $\dim A = 2$.
b) si dimostri che $\mathfrak{p}$ è primo e che $\operatorname{ht} \mathfrak{p} = 1$.
c) si dimostri che $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ non è un modulo libero di rango 1 in particolare $\mathfrak{p}$ non è un ideale invertibile.
d) si dimostri che $\varepsilon_\mathfrak{p}$ non è uguale a zero in $\mathrm{Cl}(A)$.
e) si dimostri che $2\varepsilon_\mathfrak{p} = 0$ in $\mathrm{Cl}(A)$.

Esercizio 61. Nella dimostrazione che se A è localmente fattoriale allora $Pic(A) = \mathrm{Cl}(A)$ abbiamo molto spesso utilizzato che A in particolare fosse normale ma abbiamo usato che A fosse localmente fattoriale solo in un punto. Dove?

Esercizio 62. Sia A un dominio regolare in codimensione 1 e $f \in K^*$. Si dimostri che $v_\mathfrak{p}(f) \neq 0$ solo per un numero finito di primi di altezza 1. (mi sono dimenticato di verificare questa cosa a lezione...)

Esercizio 63. Siano M e N moduli piatti. Si dimostri che $m \otimes n = 0$ se e solo se $m = 0$ o $n = 0$. Dare un controesempio nel caso in cui uno dei due moduli non sia piatto.

Esercizio 64. Sia A un anello locale noetheriano e sia M un A modulo finitamente generato. Si dimostri che se M è piatto allora è libero. (Chi sa che cosa è Tor può usarlo.)

Un paio di esercizi per chi ha qualche base in più di geometria algebrica o di curve ellittiche.

Esercizio 65. Sia $A = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 = x^3 - x)$ e sia $X \subset \mathbb{C}^2$ la curva associata ed E la curva ellittica ottenuta aggiungendo il punto all'infinito. Sia $P = (\pi, \sqrt{\pi^3 - \pi})$ un punto di E (si può prendere un qualsiasi punto che non sta nella torsione della curva ellittica quando si sceglie il punto all'infinito come zero). Si dimostri che

(1) $U = X \smallsetminus \{P\}$ è isomorfo ad una varietà affine;
(2) non esiste $f \in A$ tale che $U = X_f$.

Esercizio 66. Sia A una $\mathbb{C}$ algebra finitamente generata che sia un dominio fattoriale e sia U un aperto di $\operatorname{Spec} X$ che sia isomorfo ad una varietà affine. Allora $U = X_f$ per qualche $f \in A$. [Probabilmente basta che A sia un dominio fattoriale noetheriano]

Esercizio 67. Siano A e $\mathfrak{p}$ come nell'esercizio 60. Si dimostri che ε_P genera $\mathrm{Cl}(A)$ e che $\mathrm{Pic}(A) = 0$. [Non so se si riesce a fare questo esercizio descrivendo esplicitamente gli oggetti in questione. Con un pochino di geometria in più abbastanza veloce. Sia X la varietà correispondente ad A e sia Z la sottovarietà corrispondente a $\mathfrak{p}$, o in generale ad un primo di altezza 1 allora si ha successione esatta corta $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(A) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0$. Si noti che nel nostro corso il termine $\mathrm{Cl}(U)$ non è stato definito, il vantaggio della geometria rispetto al nostro corso è tutto qui. Inoltre si ha sempre una iniezione naturale di $\mathrm{Pic}(A)$ in $\mathrm{Cl}(A)$ anche senza assumere la locale fattorialità. Vedi Hartshorne cap 2 sez 6]

Esercizi da consegnare entro martedì 15 novembre

Consegnare 5 esercizi facenti parte della seguente lista: 35, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 53, 55, 56, 57, 59, 60, 64. Per chi a oggi non ha già fatto 5 esercizi è obbligatorio fare l'esercizio 60.

Esercizi VII settimana

Esercizio 68. Sia A una $\mathbb{C}$-algebra e sia V un A modulo irriducibile.

(1) se $\dim_\mathbb{C} V$ è finita allora $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$;
(2) se $\dim_\mathbb{C} V$ è al più numerabile allora $\mathrm{End}_A(V) = \mathbb{C}Id$.

Esercizio 69. Sia $\mathcal{A}$ una categoria nella quale valgono gli assiomi $A1, A2, A3$. Sia $\varphi : x \longrightarrow y$ e sia $\alpha = \ker \varphi$ e $\beta = \operatorname{coker} \varphi$. Si dimostri che α è un monomorfismo e β è un epimorfismo.

Esercizio 70. Sia $\mathcal{A}$ una categoria nella quale valgono gli assiomi $A1, A2, A3$. Sia $\varphi : x \longrightarrow y$ e sia $\alpha = \ker \varphi$ e $\beta = \operatorname{coker} \varphi$. Sia inoltre $\gamma = \operatorname{coker} \alpha$ e $\gamma = \ker \beta$. Si dimostri che $\ker \gamma = \alpha$ e che $\operatorname{coker} \delta = \beta$.

Esercizio 71. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Si dimostri che φ è un isomorfismo se e solo se è un epimorfismo e un monomorfismo.

Esercizio 72. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliano. Si dimostri il lemma del serpente.

Esercizio 73. Sia $\mathcal{A}$ la categoria degli anelli unitari nella quale i morfismi di anelli sono i morfismi che portano 1 in 1. In questa categoria esistono prodotti e coprodotti infiniti?

Esercizio 74.
a) Sia M un A modulo localmente libero di rango n. Dimostrare che $\Lambda^k M$ è un A modulo localmente libero di rango $\binom{n}{k}$.
b) Se M è un A modulo localmente libero di rango n pongo $\operatorname{rango} M = n$ e $\Lambda^{top} M \simeq \Lambda^n M$. Sia

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

una successione esatta corta di A moduli localmente liberi di rango finito. Si dimostri
   i) che esiste un isomorfismo naturale

$$\Lambda^{top} B \simeq \Lambda^{top} A \otimes \Lambda^{top} C$$

   ii) $\operatorname{rango} B = \operatorname{rango} A + \operatorname{rango} C$.

Esercizio 75. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow G$ una funzione da una cateogoria $\mathcal{A}$ in un gruppo abeliano tale che se

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

è esatta allora $F(B) = F(A) + F(C)$. Se M^* un complesso limitato definisco

$$F(M^*) = \sum (-1)^i F(M^i).$$

Dimostrare che $F(M^*) = \sum (-1)^i F(H^i(M^*))$.

Esercizi VIII settimana

Esercizio 76. Si verichi che la categoria omotopica soddisfa TR1, TR2.

Esercizio 77. Sia $M = \mathbb{C}[x]/(x)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva e una iniettiva del $\mathbb{C}[x]$-modulo M.

Esercizio 78. Sia $M = \mathbb{C}[x, y]/(x, y)$. Si costruisca una risoluzione proiettiva del $\mathbb{C}[x, y]$-modulo M.

Esercizio 79. Si costruisca una risoluzione iniettiva del $\mathbb{C}[x, y]$-modulo M dell'esercizio precedente.

Categorie semisemplici e non abelianità della categoria Kom.

Definizione. *Una categoria abeliana si dice semisemplice se ogni sequenza esatta corta spezza.*

Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Sia $Com_0(\mathcal{A})$ la categoria dei complessi con tutti i differenziali uguali a zero.

Esercizio 80. Sia A un anello con 1 semisemplice e sia $\mathcal{A}$ la categoria degli A-moduli. (Più in generale si può supporre che $\mathcal{A}$ sia semisemplice). Allora:
a) tutti gli oggetti sono iniettivi;
b) in $Kom(\mathcal{A})$ ogni complesso è isomorfo a un complesso in $Com_0(\mathcal{A})$;
c) nucleo e conucleo in $Com(\mathcal{A})$ sono anche nucleo e conucleo in $Kom(\mathcal{A})$;
d) $Kom(\mathcal{A})$ è abeliana.

Esercizio 81. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana e sia

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

una successione esatta corta. Supponiamo che esista $\sigma : c \longrightarrow b$ tale che $g\sigma = id_c$. Allora $b \simeq a \oplus c$.

Esercizio 82. Sia $\mathcal{D}$ una categoria triangolata e sia $f : x \longrightarrow y$ un monomorfismo. Dimostrare che $y = x \oplus z$ dove la mappa $i_x : x \longrightarrow x \oplus z$ corrisponde alla mappa $f : x \longrightarrow y$. (Sugg: si completi f ad un triangolo distinto $x \longrightarrow y \longrightarrow z \longrightarrow x[1]$ e usando la sequenza lunga degli Hom si costruisca uno spezzamento $z \longrightarrow y$, poi si concluda similmente all'esercizio precedente).

Esercizio 83. Sia X^* il complesso di gruppi abeliani che ha tutte entrate uguale a zero tranne $X^0 = \mathbb{Z}$. Sia Y^* il complesso di $\mathbb{Z}$ gruppi abeliani che ha tutte entrate uguale a zero tranne $Y^0 = \mathbb{Z}/2$ e sia $\varphi^* : X^* \longrightarrow Y^*$ la mappa che è sempre tranne $\varphi^0 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2$ che è non zero.

Si dimostri che nella categora omotopica Kom dei gruppi abeliani la mappa φ^* non ha nucleo. (sugg. si usi l'esercizio precedente)

Esercizio 84. Sia $\mathcal{D}$ una categoria triangolata che sia abeliana. Si dimostri

(1) che se

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \longrightarrow 0$$

è esatta allora

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{0} a[1]$$

è distinto.

(2) si dimostri che ogni successione esatta corta spezza

(3) Sia $f : a \longrightarrow b$ un morfismo in K e sia

$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\alpha} z \xrightarrow{\beta} x[1]$$

un triangolo distinto. Dimostrare che $z \simeq \ker f[1] \oplus coker\, f$.

Esercizio 85. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana (se preferite potete fare la categora degli A moduli con A anello associativo unitario) Dimostrare che se $Kom(\mathcal{A})$ è abeliana allora $\mathcal{A}$ è semisemplice (A è semisemplice). (l'esercizo precedente vi dice che $Kom(\mathcal{A})$ è semisemplice ma non direttamente che $\mathcal{A}$ è semisemplice)

Esercizi IX settimana

Esercizio 86. a) Sia A un dominio commutativo ad ideali principali. Si dimostri che per ogni coppia di A-moduli M, N si ha che $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ per $i \geqslant 2$.

b) Sia $B = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y \oplus \mathbb{C}z$ una $\mathbb{C}$-algebra associativa unitaria dove il prodotto tra gli elementi della base è definito nel modo seguente: $x^2 = x, y^2 = y, z^2 = 0, xy = yx = xz = zy = 0$ $zx = yz = z$ ed è poi esteso a tutto $B \times B$ per $\mathbb{C}$-bilinearità. L'unità dell'algebra è data da $x + y$.

Si decomponga B in moduli proiettivi indecomponibili (cioè che non si scrivono come somma diretta di sottomoduli propri).

c) Si dimostri che per ogni coppia di B-moduli M, N si ha che $\mathrm{Ext}^i_B(M, N) = 0$ per $i \geqslant 2$.

(Si costruisca una risoluzione di un M lunga 2)

Esercizio 87. Sia M^* e N^* due complessi di moduli limitati superiormente. Siano P^* e Q^* risoluzioni proiettive di M^* e N^*. Si consideri il complesso doppio in cui $X^{i,j} = P^i \otimes Q^j$ con bordi verticali $Id \otimes \partial^j_Q$ e orizzontali $\partial^i_P \otimes Id$. Sia $M^* \otimes^L N^*$ il complesso totale associato a questo complesso doppio:

a) si dimostri che è $M^* \otimes^L N^*$ è univocamente definito a meno di omotopia,

b) si dimostri che se M^* è un complesso con entrate tutte nulle tranne in 0 allora $H^{-i}(M^* \otimes^L N^*) = \mathrm{Tor}_i(M^0, N^*)$. ($Tor_i(A, \cdot)$ è il funtore derivato sinistro di $A \otimes \cdot$.)

Esercizio 88. Sia M un A modulo. Si dimostri una sola delle seguenti affermazioni:

(1) M è proiettivo se e solo se $\mathrm{Ext}^1(M, X) = 0$ per ogni A modulo X;

(2) M è iniettivo se e solo se $\mathrm{Ext}^1(X, M) = 0$ per ogni A modulo X;

(3) M è piatto se e solo se $\mathrm{Tor}_1(M, X) = 0$ per ogni A modulo X.

Se M è un A modulo definisco la dimensione omologica proiettiva di M nel seguente modo:

$$\mathrm{dhp}(M) = \max\{n : \text{ esiste un modulo } N \text{ tale che } \mathrm{Ext}^n(M, N) \neq 0\}$$

per esempio un modulo proiettivo ha dimensione omologica proiettiva uguale a 0. Si dimostri che se

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \qquad P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

è una successione esatta e i moduli P_i sono proiettivi allora

$$\mathrm{dhp}(N) = max(0, \mathrm{dhp}(M) - n - 1).$$

Si dimostri infine che

$$\mathrm{dhp}(M) = \min\{n : \text{ esiste una risoluzione proiettiva di } M \text{ lunga } n + 1\}$$

(lunga $n+1$ qui vuol dire con $n+1$ termini in modo che un modulo proiettivo abbia una risoluzione proiettiva lunga 1).

Esercizio 89 (La coomologia di $U(n)$)**.** Sia $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_k)$ una lista di numeri naturali dispari. Per $I \subset \{1, \dots, k\}$ poniamo $d_I = \sum_{i \in I} d_i$ e $\mathbf{d}(h) = \operatorname{card}\{I : d_I = h\}$. Definiamo inoltre $M(\mathbf{d}) = \bigoplus M_n$ come lo spazio vettoriale graduato in cui M_h è uguale a $\mathbb{C}^{\mathbf{d}(h)}$, quindi $\dim M(\mathbf{d}) = 2^k$.

Costruiamo adesso per induzione una successione di liste $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2, \dots$ di lunghezze diverse nel seguente modo:

La prima lista è $\mathbf{d}^1 = (1)$.

Costruita $\mathbf{a} = \mathbf{d}^{n-1}$ la lista successiva $\mathbf{b} = \mathbf{d}^n$ è costruita nel seguente modo. Si considerino gli spazi vettoriali graduati $K = M(\mathbf{a}) = \bigoplus K_i$ e $H = M(\mathbf{b}) = \bigoplus H_i$. Esiste un complesso doppio $X^{*,*}$ tale che la coomologia del complesso totale associato è uguale a H, e tale che la sequenza spettrale associata alla filtrazione orizzontale verifica:

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq 0, 2n-1 \\ K_q & \text{se } p = 0, 2n-1 \end{cases}$$

i) Si calcoli $\mathbf{d}^2$.

ii) Si calcoli $\mathbf{d}^n$ per ogni n. (si ricordi che le entrate delle liste sono numeri dispari)

Esercizio 90. Si dimostri il punto 2 del teorema sulla sequenza spettrale di Grothendieck fatto in classe.

Esercizi da consegnare entro il 16 dicembre e entro il 15 gennaio

Dovete ancora consegnare 6 esercizi, li potete consegnare tutti entro il 16 dicembre oppure ne potete consegnare 4 entro il 16 dicembre e altri due entro il 15 gennaio (o anche 5 e 1). Gli esercizi vanno scelti nella seguente lista: 68, 71, 73, 75, 77, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90. È obbligatorio consegnare un esercizio della VII settimana, il 77, e almeno due esercizi della IX settimana.