Esercizi prima settimana

Esercizio 1. Mostrare che gli insiemi $V(I)$ costituiscono un sistema di chiusi per $\operatorname{Spec} A$.

Esercizio 2. Si dimostri che $V(I) \simeq \operatorname{Spec} A/I$ come spazio topologico.

Esercizio 3. Sia $X = \operatorname{Spec} A$ e per $f \in A$ sia $X_f = X \smallsetminus V(f)$. Si dimostri che X_f è un sistema fondamentale di aperti di X. Si dimostri che $X_f \simeq \operatorname{Spec} A_f$ come spazio topologico.

Esercizio 4. Sia $X = \operatorname{Spec} A$. Si dimostri che X è compatto.

Esercizio 5. Uno spazio topologico X si dice riducibile se si può scrivere come l'unione di due chiusi diversi da X. Uno spazio topologico non riducibile si dice irriducibile. Dimostrare che $\operatorname{Spec} A$ è irriducibile se e solo se $\sqrt{0}$ è un ideale primo.

Esercizio 6. Un punto $\mathfrak{p}$ di $\operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se $\mathfrak{p}$ è massimale.

Esercizio 7. Dimostrare che la piattezza di un modulo è una proprietà locale

Esercizio 8. Mostrare che la proprietà di essere noetheriano per un anello non è un fatto locale esibendo un anello non noetheriano le cui localizzazioni negli ideali primi sono tutte notheriane.

Esercizio 9. Dimostrare che la IV formulazione del teorema degli zeri di Hilbert implica la III formulazione. (sia $f \in J$ e $f \notin \mathfrak{p}$ con $\mathfrak{p} \supset I$ ideale primo. Si consideri un ideale massimale $\mathfrak{m}$ dell'anello $D = (A/\mathfrak{p})_f$. Allora $D/\mathfrak{m} \supset \Bbbk$)

Esercizio 10. Sia E un campo non necessariamente algebricamente chiuso e sia $S = E[x_1, \dots, x_n]$. Sia I un ideale di S. Si dimostri che

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{m} \supset I \text{ massimale}} \mathfrak{m}.$$

Esercizi seconda settimana

Esercizio 11. Sia d un intero libero da quadrati. Sia A la chiusura intera di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Mostrare che

$$A = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{d}] & \text{se } d \equiv 2, 3 \mod 4 \\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}] & \text{se } d \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

Esercizio 12. Si dia un esempio di un anello che sia normale ma che non sia a fattorizzazione unica.

Definizione. *Sia $f : A \longrightarrow B$. Si dice che verifica la proprietà del going down se per ogni $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$ e per ogni $\mathfrak{q}_2$ in $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_2$ esiste $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ in $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_1$.*

Similmente si dice che verifica la proprietà del going up se per ogni $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \in \operatorname{Spec} A$ e per ogni $\mathfrak{q}_1$ in $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_1$ esiste $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}_2$ in $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_2$.

Esercizio 13. Sia $A \subset B$ una estensione intera, $\Bbbk$ un campo algebricamente chiuso e $f : A \longrightarrow \Bbbk$ un morfismo di anelli. Dimostrare che f si può estendere a tutto B.

Esercizio 14.

a) Sia $A \subset B$ una estensione intera. Si dimostri che f^* è una applicazione chiusa.
b) Sia $f : A \longrightarrow B$ tale che f^* è chiusa. Allora f soddisfa la proprietà del going up.

Esercizio 15. Sia $\Bbbk$ un campo. Dimostrare che $A = \Bbbk[X, Y]/(Y^3 - X^5)$ è un dominio e descrivere la sua chiusura integrale (nel suo campo delle frazioni).

Esercizio 16. Sia $f \in \mathbb{C}[x, y]$ un polinomio irriducibile tale che $f(0, 0) = 0$. Sia A la localizzazione di $\mathbb{C}[x, y]/(f)$ nell'ideale (x, y). Sia f_i la parte omogenea di grado i del polinomio f e sia $f = f_1 + \cdots + f_m$.

a) Si dimostri che se A è integralmente chiuso allora $f_1 \neq 0$ [ispirarsi all'esempio in classe, eventualmente cambiare variabili]
b) Si dimostri che se $f_1 \neq 0$ allora A è integralmente chiuso. [si può supporre $f_1 = x$. Dimostrare che l'ideale massimale di A è (y). Dedurne che A è fattoriale.]

Possiamo riformulare questo esercizio dicendo che una curva in $\mathbb{C}^2$ è normale se e solo se è liscia. [In realtà l'ipotesi $\mathbb{C}^2$ non serve]

Esercizio 17. Si dimostri che f soddisfa la proprietà del going down se e solo se per ogni $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, e posto $\mathfrak{p} = f^*(\mathfrak{q})$ si ha che l'applicazione indotta $\operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ è suriettiva.

Esercizio 18. Si dimostri che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going down. [Siano $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ primi di A e sia $\mathfrak{q}_2$ un primo di $\operatorname{Spec} B$ tale che $f^*(\mathfrak{q}_2) = \mathfrak{p}_1$ e sia I l'estensione di $\mathfrak{p}_1$ in B. Si mostri preliminarmente che $A/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow B/I$ è piatta e se ne deduca che è iniettiva.]

Esercizio 19. Sia A un dominio normale e sia K il suo campo dei quozienti. Sia $L \supset K$ una estensione di Galois, finita con gruppo di Galois Γ. Sia B la chiusura integrale di A in L. Dato $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ sia

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,:\, \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}\,.$$

Si dimostri che

a) B è stabile per l'azione di Γ.
b) $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ è stabile per l'azione di Γ.
c) si dimostri che se $\mathfrak{p}_i$ sono ideali primi di un anello C e $J \subset \cup \mathfrak{p}_i$ allora $J \subset \mathfrak{p}_i$ per qualche i. [questo lo dovreste sapere da algebra 2]
d) Siano $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ e si supponga che $\mathfrak{q}' \neq \sigma(\mathfrak{q})$ per ogni $\sigma \in \Gamma$ allora esiste $y \in \mathfrak{q}'$ tale che $\sigma(y) \notin \mathfrak{q}$ per ogni $\sigma \in \Gamma$.
e) Γ agisce transitivamente su $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$.
f) Si faccia un esempio della situazione precedente nel quale $A = \mathbb{Z}$.
g) Si faccia un esempio della situazione precedente nel quale $A = \mathbb{C}[t]$.

Esercizio 20. Sia A un dominio normale e sia $A \subset B$ con B dominio una estensione intera. Allora $f^* : Y = \operatorname{Spec} B \longrightarrow X = \operatorname{Spec} A$ è aperta.

Più precisamente se $b \in B$ e $t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ è il polinomio minimo di b su A si mostri che

$$f^*(Y_b) = \bigcup X_{a_i}.$$

[La notazione per gli aperti Y_b, X_a è quella dell'esercizio 3].

Osservazione sull'esercizio 20. La proprietà del going down e la proprietà di essere aperta sono strettamente collegate. Infatti se f^* è aperta allora vale la proprietà del going down. L'implicazione inversa non vale (un controesempio è molto facile da costruire tenendo presente il risultato dell'esercizio 18). Se però assumiamo che A e B sono noetheriani e B è una A-algebra finitamente generata allora vale anche l'implicazione inversa.

Esercizi da consegnare per martedì 13 ottobre

Chi vuole essere esonerato dal compito scritto finale e non prende gli appunti in queste due settimane deve consegnare entro martedì 13 ottobre la soluzione degli esercizi numero 9, 19, 20 e dei due seguenti esercizi.

Esercizio. Sia $A = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 + x^2)$ e sia K il suo campo dei quozienti. Si calcoli la chiusura integrale di A in K.

Esercizio. È vero che se $f : A \longrightarrow B$ è piatta allora soddisfa la proprietà del going up?

Esercizi terza settimana

Esercizio 21. Sia $\Bbbk$ un campo infinito e sia A una $\Bbbk$-algebra generata da $x_1, \dots, n_n$. Dimostrare che esistono $y_1, \dots, y_m$ algebricamente indipendenti su $\Bbbk$ e lineari in $x_1, \dots, x_n$ tali che A è intera su $\Bbbk[y_1, \dots, y_m]$. [Procedere in modo molto simile alla dimostrazione del Lemma di Noether fatta in classe ponendo $y_i = x_i + \lambda_i x_1$]

Definizione. *Sia M un A modulo. Il* supporto *di M è definito come l'insieme dei primi $\mathfrak{p}$ di A tali che $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$ e si indica con* $\operatorname{Supp} M$.

Esercizio 22. Sia M un A modulo finitamente generato. Si dimostri che $\operatorname{Supp} M = V(\operatorname{Ann} M)$

Esercizio 23. Sia $\Bbbk$ un campo e sia $A = \Bbbk[x] \times \Bbbk[y,z]$. Si esibiscano due insiemi massimali di elementi di A algebricamente indipendenti su $\Bbbk$ di cardinalità diversa.

Esercizio 24.

a) Sia $A = B \times C$ si dimostri che $\operatorname{Spec} A$ è omeomorfo a $\operatorname{Spec} B \coprod \operatorname{Spec} C$.
b) Sia $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$. è vero che ogni ideale primo di A_i è della forma $\prod_{j<i} A_j \times \mathfrak{p}_i \times \prod_{j>i} A_j$ per qualche primo $\mathfrak{p}_i$ di A_i?

Esercizio 25. Sia A un'algebra artiniana. Si dimostri che A è il prodotto di un numero finito di anelli artiniani locali.

Esercizio 26. Sia $\Bbbk$ un campo e sia A una $\Bbbk$-algebra finitamente generata. Si dimostri che A è artiniana se e solo se $\dim_{\Bbbk} A < \infty$.

Esercizio 27. Sia $A \subset B$ una estensione finita di anelli noetheriani. Dimostrare che per ogni $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ la cardinalità di $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,:\, \mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}\}$ è finita

Definizione. *Un anello si dice irriducibile se il suo radicale è un ideale primo.*

Esercizio 28. Sia A un anello noetheriano e sia $A = A_1 \times \cdots \times A_k$ con gli A_i irriducibili. Dimostrare che gli A_i sono univocamente determinati a meno di permutazione. Più precisamente se $\varphi : A \longrightarrow B_1 \times \cdots \times B_h$ è un isomorfismo e i B_i sono irriducibili allora $h = k$ e a meno di permutazione $\varphi(A_i) = B_i$.

Esercizi quarta settimana

Esercizio 29. Sia $M = \bigoplus M_n$ un modulo graduato. Un sottomodulo graduato N di M è un sottomodulo di M tale che $N = \bigoplus (N \cap M_n)$. Dimostrare che sono equivalenti: i) N è un sottomodulo e' graduato, ii) N è generato da elementi omogenei, iii) per ogni $x = \sum_n x_n$ di M si ha che $x \in N$ se e solo se x_n in N per ogni n.

Esercizio 30. Sia A un anello graduato e M un A modulo finitamente generato. Sia $A_+ = \bigoplus_{n \geqslant 1} A_n$. Se $A_+ M = M$ allora $M = 0$.

Esercizio 31. Sia $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ e sia f un polinomio omogeneo di grado N. Calcolare serie e polinomio di Hilbert di $A/(f)$.

Esercizio 32. Sia A graduato con A_0 artiniano e A noetheriano e sia M finitamente generato. Sia inoltre A generato in grado 1 come A_0-algebra. Sia x omogeneo tale che $sexm = 0$ allora $m = 0$ per $m \in M$. Allora
$$d(M/xM) = d(M) - 1.$$

Esercizio 33. Sia A noetheriano, I un ideale di A e M un A modulo finitamente generato. Allora
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n M = \big\{m \in M \;:\; \text{ esiste } x \in I \text{ e } (1+x)m = 0\big\}.$$

Esercizio 34. Sia M un modulo noetheriano e artiniano. Sia $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$ e $L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n$ due serie di Jordan Holder. Dimostrare che esiste una permutazione σ di n tale che $M_i/M_{i-1} \simeq L_{\sigma(i)}/L_{\sigma(i)-1}$.

Esercizio 35. Sia A un anello graduato e I un ideale omogeneo. Allora I è un ideale primo se e solo se per ogni coppia di elementi omogenei a, b di A se $ab \in I$ allora $a \in I$ o $b \in I$.

Definizione. *Sia A un anello graduato. Un ideale primo ed omogeneo di A si dice ammissibile se non contiene A_+.*

Esercizio 36. Dimostrare che gli ideali ammissibili massimali di $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ sono in corrispondenza con i punti di $\mathbb{P}^{n-1}$, lo spazio proiettivo $n-1$ dimensionale.

Esercizio 37. Sia $A = \mathbb{C}[x, y]$, $I = (x, y)$ e $B = \mathrm{Bl}_I(A)$.

a) si dimostri che $B \simeq \mathbb{C}[x, y, u, v]/(xv - yu)$.
b) si dimostri che l'insieme degli ideali ammissibili massimali di B che intersecano A in (x, y) è in corrispondenza con $\mathbb{P}^1$
c) si dimostri che se $(a, b) = (0, 0)$ allora c'è un solo ideale ammissibile di B che interseca A in $(x - a, y - b)$.

Esercizi quinta settimana

Dimensione negli anelli graduati. Sia $A = \bigoplus_{n \geqslant 0} A_n$ un anello noetheriano graduato e supponiamo che $A_0 = \Bbbk$ sia un campo (basterebbe anello artiniano) e sia $\mathfrak{m} = A_+$. Nei prossimi esercizi viene sviluppata una teoria simile a quella sviluppata per gli anelli locali, in generale molto spesso la teoria degli anelli graduati è una forma semplificata (ma non troppo) di quella degli anelli graduati. Fare questo esercizi è anche un modo per ripercorrere la teoria svolta per gli anelli locali noetheriani. Definiamo

- $p \dim A$ come la lunghezza della massima catena di ideali primi omogenei;

- $p\delta(A)$ come il minimo n tale che esiste un ideale $\mathfrak{m}$-primario omogeneo generato da n elementi;
- $\delta(A)$ come il minimo n tale che esiste un ideale $\mathfrak{m}$-primario generato da n elementi;
- $pd(A) = 1 + grado\varphi$ dove φ è il polinomoi tale che $\varphi(n) = \dim A_n$ per $n >> 0$.

L'obiettivo è dimostrare la seguente affermazione

Teorema. *Sia* $\mathfrak{m} = A_+$. *Allora*

$$\dim A = p\dim A = \delta(A) = p\delta(A) = pd(A) = \dim A_{\mathfrak{m}}.$$

e inoltre per ogni $\mathfrak{n}$ *massimale di* A *l'anello* $A_{\mathfrak{n}}$ *è regolare se e solo se* $A \simeq \Bbbk[x_1, \ldots, x_d]$.

NOTA: potrebbe essere benissimo che ci siano delle ottime scorciatoie rispetto a quelle indicate negli esercizi seguenti. In compenso la successione degli esercizi dovrebbe fornire una indicazione abbastanza semplice per dimostrare il risultato in questione.

Esercizio 38. Se I è un ideale si ponga $\bar{I} = \bigoplus I \cap A_n$. Si dimostri che se P è primo allora $\bar{P}$ è primo.

Esercizio 39. Se I è un ideale omogeneo di A allora gli ideali primi minimali contenti I sono omogenei.

Esercizio 40. Dimostrare che

$$\delta(A) = p\delta(A) = p\dim(A) = pd(A).$$

[Dimostrare $p\delta \geqslant \delta \geqslant pd \geqslant p\dim \geqslant p\delta$]

Esercizio 41. Dimostrare $p\dim A = \dim A_{\mathfrak{m}}$.

Esercizio 42. Dimostrare il teorema enunciato sopra.

Definizione. *Un anello* B *si dice regolare se per ogni ideale massimale* $\mathfrak{n}$ *di* B *l'anello locale* $B_{\mathfrak{n}}$ *è regolare.*

Esercizio 43. A è regolare se e solo se $A \simeq \Bbbk[x_1, \ldots, x_r]$.

Anelli di dimensione uno. Gli sercizi seguenti caratterizzano i domini noetheriani di dimensione 1. Sia K un campo. Una *valutazione* di K è una mappa $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che

- $v(xy) = v(x) + v(y)$;
- $v(x + y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$;

Inoltre la valutazione si dice *discreta* se la sua immagine è della forma $\mathbb{Z}q$ per qualche $q \in \mathbb{Q}$.

Data una valutazione di K poniamo

$$A_v = \{0\} \cup \{a \in K^* : v(a) \geqslant 0\} \qquad \mathfrak{m}_v = \{0\} \cup \{a \in K^* : v(a) > 0\}.$$

Un dominio si dice di valutazione discreta se esiste una valutazione discreta v del suo campo dei quozienti tale che $A = A_v$.

Esempio fondamentale. Sia K il campo dei quozienti di un anello fattoriale A, e sia p un primo di A. Se $a \in A$ e $a \neq 0$ definisco

$$v_p(a) = \max\{n : p^n | a\}.$$

v_p si estende a tutto K e definisce una valutazione discreta di K.

Esercizio 44. Sia v una valutazione di K. Dimostrare che

a) $(A_v, \mathfrak{m}_v)$ è un anello locale
b) $x \in A_v^*$ se e solo se $x \neq 0$ e $v(x) = 0$
c) A_v è un dominio normale.

Esercizio 45. Sia $v : K^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ una valutazione discreta di K e siano A_v. Dimostrare che

a) A_v è noetheriano
b) ogni ideale di A_v è principale
c) A_v è regolare
d) $\dim A_v = 1$
e) esiste $p \in A_v$ tale che $v = v_p$.

Esercizio 46. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un dominio locale noetheriano. Si dimostri che se $\mathfrak{m}$ è principale allora A è di valutazione discreta.

Esercizio 47. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un dominio locale noetheriano di dimensione uno e sia K il suo campo dei quozienti. Allora i seguenti fatti sono equivalenti

a) A è regolare
b) A è normale
c) $\mathfrak{m}$ è principale
d) A è di valutazione discreta.

Esercizi da consegnare martedì 3 novembre

Chi vuole essere esonerato dal compito scritto finale e non prende gli appunti in queste due settimane deve consegnare entro martedì 3 novembre la soluzione degli esercizi numero 38, 39, 40, 41, 42 oppure degli esercizi 32, 34, 37, 44, 45.

Esercizi sesta settimana

Esercizio 48. Descrivere limiti e colimiti nella categoria degli insiemi.

Esercizio 49. Descrivere limiti e colimiti nella categoria degli A-moduli.

Esercizio 50. Fare gli esercizi lasciati a lezione (se qualcuno mi scrive quali sono lo ringrazio).

Esercizi ottava settimana

Definizione. *Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due categorie la categoria prodotto $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ è la categoria che ha come oggetti le coppie (a,b) con a oggetto di $\mathcal{A}$ e b oggetto di $\mathcal{B}$ e morfismi le coppie di morfismi. La composizione è definita componente per componente. In particolare il funtore* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}$ *lo possiamo vedere come un funtore da $\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{A}$ in* Set.

Siano $F:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ e $G:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{A}$ due funtori. Si considerino i due funtori H,K da $\mathcal{A}^{op}\times\mathcal{B}$ in set definiti da

$$H:(a,b)\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(a,G(b)\big) \quad e \quad K:(a,b)\longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(F(a),b\big)$$

e similmente sui morfismi. Il funtore F si dice un aggiunto sinistro di G e G un aggiunto destro di F se H e K sono naturalmente equivalenti.

Esercizio 51. Sia F un aggiunto sinistro di G. Dimostrare che F commuta con i colimiti ovvero

$$F\Big(\overset{\mathcal{A}}{\varinjlim} L(i)\Big) = \overset{\mathcal{B}}{\varinjlim} F\Big(L(i)\Big)$$

e similmente G commuta con i limiti.

Esercizio 52. Sia Ring la categoria degli anelli e sia $G:\mathsf{Ring}\longrightarrow\mathsf{Set}$ il funtore dimenticante. Descrivere un aggiunto sinistro di G.

Definizione. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie additive e sia F un funtore da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Si dice che F è additivo se $F:\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}\big(a,a'\big)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}\big(F(a),F(a')\big)$ è un morfismo di gruppi abeliani per ogni coppia di oggetti, a,a' in $\mathcal{A}$.*

Esercizio 53. Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie additive nel quale valgono gli assiomi II, e III (esistenza dell'oggetto zero e esistenza di somme finite). e sia F un funtore da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. I seguenti fatti sono equivalenti:

i) F è additivo;
ii) F preserva le somme finite;
iii) F preserva i prodotti finiti.

Definizione. *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due categorie abeliane e sia F un funtore additivo da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$. Si dice che F è esatto a sinistra se per ogni successione esatta corta*

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

la successione

$$0\longrightarrow F(A)\longrightarrow F(B)\longrightarrow F(C)$$

è esatta. Similmente si dice che F è esatto a destra se per ogni successione esatta corta

$$0\longrightarrow A\longrightarrow B\longrightarrow C\longrightarrow 0$$

la successione

$$F(A)\longrightarrow F(B)\longrightarrow F(C)\longrightarrow 0$$

è esatta. F si dice esatto se è esatto sia a destra che a sinistra.

Esercizio 54. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana, a un oggetto di $\mathcal{A}$ e Ab la categoria dei gruppi abeliani. Allora i due funtori

$$h_a : \mathcal{A}^{op} \longrightarrow \mathsf{Ab} \;\text{ e }\; \tilde{h}_a : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

sono esatti a sinistra.

Esercizio 55. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo tra due categorie abeliane. Dimostrare che F è esatto a sinistre se e solo se per ogni successione esatta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

la successione

$$0 \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

è esatta. Un affermazione simile vale per l'esattezza a destra.

Esercizio 56. Sia $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un funtore additivo tra due categorie abeliane e sia G un suo aggiunto destro. Dimostrare che F è esatto a destra e G a sinistra.

Esercizio 57. Sia A un dominio ad ideali principali. Si dimostri che un A-sottomodulo di un A-modulo libero è libero e che che un A-modulo è proiettivo se e solo se è libero.

Definizione. *Sia M un A-modulo e N un suo sottomodulo. N si dice saturo se per ogni $a \in A \setminus \{0\}$ e per ogni $m \in M$ se $am \in N$ allora $m \in N$.*

Esercizio 58. Sia A un dominio ad ideali principali ed M un A-modulo libero finitamente generato. Sia $N \subset M$ un sottomodulo saturo. Si dimostri che esiste un sottomodulo L di M tale che $L \oplus N = M$.

Esercizio 59. L'affermazione dell'esercizio precedente rimane vera se non si assume che M sia finitamente generato?

Esercizio 60. Sia M^* un complesso non limitato di A-moduli (senza assumere limitato). Si dimostri che esiste un complesso F^* di A-moduli proiettivi quasi isomorfo a M^*.

Esercizio 61. Sia $\mathcal{V}$ un insieme finito di n elementi e sia $\Delta = \mathcal{P}(\mathcal{V}) \setminus \{\mathcal{V}\}$. Si calcoli l'omologia del complesso simplicale $|\Delta|$.

Esercizi decima settimana

Esercizio 62. Sia S un sistema localizzante nella categoria $\mathcal{C}$. Siano a, b, c, d quattro oggetti di $\mathcal{C}$. Sia dato il seguente diagramma commutativo in $S^{-1}\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & b \arrow[d, "g"] \\ c \arrow[r, "\alpha"] & d \end{tikzcd}$$

dove f, g sono morfismi in $\mathcal{C}$ e α, β morfismi in $S^{-1}\mathcal{C}$. Allora esiste un diagramma commutativo in $\mathcal{C}$ della forma

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"] & u \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "h"] & b \arrow[d, "g"] \\ c & v \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "\beta_0"] & d \end{tikzcd}$$

con $s, t \in S$ e $\alpha = \alpha_0 s^{-1}$ e $\beta = \beta_0 t^{-1}$ in $S^{-1}\mathcal{C}$.

Esercizio 63. Dimostrare che i triangoli distinti in $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ verificano TR1, TR2, TR3. [utilizzare l'esercizio precedente e il fatto che la categoria dei quasi isomorfismi è localizzante in $Kom(\mathcal{A})$]

Esercizio 64. Utilizzando il fatto che la categoria dei quasi isomorfismi è localizzante in $Kom(\mathcal{A})$ e che $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ è la localizzazione di $Kom(\mathcal{A})$ rispetto ai quasi isomorfismi dimostrare che se $f : A^* \longrightarrow B^*$ è un morfismo tra complessi allora i seguenti fatti sono equivalenti

(1) $f = 0$ in $\mathsf{D}(\mathcal{A})$;
(2) esiste un quasi isomorfismo s tale che sf è omotopicamente equivalente a zero;
(3) esiste un quasi isomorfismo t tale che ft è omotopicamente equivalente a zero.

Esercizio 65. Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana con abbastanza iniettivi. Dimostrare che $Kom^+(\mathcal{I})$, la categoria dei complessi limitati inferiormente di oggetti iniettivi, è naturalmente equivalente a $\mathsf{D}^+(\mathcal{A})$.

Esercizio 66 (Gelfand-Manin)**.** Si considerino complessi di gruppi abeliani.

i) si dia un esempio di un morfismo tra complessi che sia omotopicamente equivalente a zero ma che non sia 0;
ii) si dia un esempio di un morfismo tra complessi che sia 0 nella cateogria derivata ma che non sia omotopicamente equivalente a zero;
iii) si dia un esempio di un morfismo f tra complessi tale che $H^*(f) = 0$ ma che non zero nella categoria derivata.

[per l'esempio i) riciclare un esempio prodotto in classe, per l'esempio iii considerare il morfismo tra complessi definito dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 2"] \arrow[d, "\cdot 1"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\cdot 2"] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\cdot 1"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

e l'esercizio precedente.]

Categorie semisemplici e non abelianità della categoria Kom**.**

Definizione. *Sia $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. $\mathcal{A}$ si dice semisemplice se e solo ogni sequenza esatta corta spezza.*

Sia $Com_0(\mathcal{A})$ la categoria dei complessi con tutti i differenziali uguali a zero.

Esercizio 67. Se $\mathcal{A}$ è semisemplice allora $\mathsf{D}(\mathcal{A})$ è naturalmente equivalente a $Com_0(\mathcal{A})$.

Esercizio 68. $\mathcal{A}$ è semisemplice se e solo se $Ext^1(a, b) = 0$ per ogni coppia di oggetti a, b di $\mathcal{A}$.

Esercizio 69 (Gelfand-Manin eserc. 1 pg. 260)**.** Sia $\mathcal{A}$ abeliana e supponiamo che $Kom(\mathcal{A})$ sia abeliana.

i) Sia data una successione esatta corta
$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \longrightarrow 0$$
in $Kom(\mathcal{A})$ allora
$$a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c \xrightarrow{0} a[1]$$
è distinto e inoltre la successione esatta corta spezza, in particolare $Kom(\mathcal{A})$ è semisemplice
ii) Sia $f : a \longrightarrow b$ un morfismo in K e sia
$$x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\alpha} z \xrightarrow{\beta} x[1]$$
un triangolo distinto. Dimostrare che $z \simeq \ker f[1] \oplus coker\, f$, dove nucleo e conucleo sono presi in $Kom(\mathcal{A})$ e le mappe α e β sono quelle ovvie.

Esercizio 70. Dimostrare che se $Kom(\mathcal{A})$ è abeliana allora $\mathcal{A}$ è semisemplice.

Moduli proiettivi.

Esercizio 71. Dimostrare che se un modulo è proiettivo allora è piatto.

Esercizio 72. Sia M un A modulo localmente libero e sia A un dominio. Dimostrare che $\text{rango}_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$ è indipendente da $\mathfrak{p}$.

Esercizio 73. Sia A un dominio noetheriano e M e N due moduli proiettivi finitamente generati. Si dimostri che se $M \otimes N$ è proiettivo di rango uguale al prodotto dei ranghi di M e N.

Esercizio 74. Sia A un dominio noetheriano e sia M un modulo proettivo di rango uno. Si dimostri che esiste un modulo N proiettivo di rango 1 tale che $N \otimes M \simeq A$.

Esercizio 75 (per chi ha fatto teoria algebrica dei numeri)**.** Sia $\mathbb{Q} \subset L$ una estensione di campi finita e sia A la chiusura integrale di $\mathbb{Z}$ in L (più in generale si può assumere che A sia A un dominio integralmente chiuso di dimensione 1). Dimostrare che $\text{Pic}(A)$ è isomorfo al gruppo delle classi di ideali frazionari di A.

Esercizio 76. Sia $A = \mathbb{C}[t^2, t^3] \simeq \mathbb{C}[x, y]/(y^2 = x^3)$. Per ogni $a \in \mathbb{C}$ sia
$$M_a = \{f \in \mathbb{C}[t] \,:\, f'(0) = af(0)\}.$$
Si dimostri che

(1) M_a è un A-sottomodulo di $\mathbb{C}[t]$;
(2) M_a è generato dal polinomio $1 + at$ e da t^2;
(3) M_a è un A modulo proiettivo di rango 1;
(4) $M_a \otimes M_b \simeq M_{a+b}$;
(5) $M_a \simeq M_b$ se e solo se $a = b$.

Esercizi da consegnare per venerdì 11 dicembre

Consegnare una delle seguenti liste di esercizi: 62, 63, 66, 67, 68 oppure 63, 67, 68, 69, 70 oppure 59, 63, 68, 74, 75.

Esercizi da consegnare entro il 13 gennaio

Si consegnino gli esercizi 77, 84, 86 e altri 2 esercizi scelta.

Definizione. *Una rappresentazione (complessa) di un gruppo G è una coppia (V, σ) dove V è uno spazio vettoriale complesso e σ è una azione lineare di G su V (ovvero per ogni $g \in G$ la mappa $v \mapsto \sigma(g, v)$ è lineare).*

Molt spesso si dice che V è una rappresentazione di G sottointendendo che è anche fissata una azione σ che di solito si indica con un pallino $\sigma(g, v) = g \cdot v$. Anche noi adotteremo questa notazione incompleta.

Se V e W sono due rappresentazioni di G i morfismi di G-rappresentazioni da V in W sono le applicazioni lineari da V in W che commutano con l'azione di G (ovvero $\varphi(g \cdot v) = g \cdot \varphi(v)$).

Una rappresentazione si dice banale se $g \cdot v = v$ per ogni $g \in G$ e per ogni $v \in V$.

La categoria delle rappresentazioni di G si indica con $\mathrm{Rep}(G)$ ed è una categoria abeliana con la somma usuale. (è una affermazione non si chiede di dimostrarlo, la dimostrazione è un po' lunga ma ovvia).

Esercizio 77. Si consideri la categoria $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$. Sia $\mathbb{C}$ la rappresentazione banale unidimensionale e sia $P = \mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ munito dell'azione
$$m \cdot f(t) = t^m f(t).$$
Infine sia $F : \mathrm{Rep}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathsf{Vett}_{\mathbb{C}}$ il funtore definito da $F(V) = V^{\mathbb{Z}}$ gli elementi fissati da $\mathbb{Z}$.

i) Si dimostri che P è proiettivo e che $\mathrm{Rep}(\mathbb{Z})$ ha abbastanza iniettivi;
ii) si dimostri che F è esatto a sinistra ma non esatto;
iii) Si calcoli $R^i F(\mathbb{C})$ per ogni i.
iv) Si descriva il gruppo $Ext_i(\mathbb{C}, V)$ per ogni i e per ogni $\mathbb{Z}$-rappresentazione V.

Esercizio 78. Sia G un gruppo qualsiasi e sia $\mathbb{C}$ la rappresentazione unidimensionale banale di G e $F : \mathrm{Rep}(G) \longrightarrow \mathsf{Vett}_{\mathbb{C}}$ il funtore definito da $F(V) = V^G$, gli elementi fissati da G. Si dimostri che la categoria ha abbastanza iniettivi e che $R^i F(V) \simeq Ext^i(\mathbb{C}, V)$.

Esercizio 79. Sia A la localizzazione di $\mathbb{Z}[x, y]$ nell'ideale $(5, x-1, y+2)$ e sia $B = A/(x^2+y^2+4y-3x+6)$. Si calcolino dimensione di A e B e si dica se sono anelli regolari.

Esercizio 80. Sia A un anello commutativo con unità e sia M un A-modulo tale che esistono $a_1, \ldots, a_n$ che generano l'ideale (1) e per i quali M_{a_i} è libero su A_{a_i} di rango k. Si dimostri che M è finitamente generato.

Esercizio 81. Sia A un dominio noetheriano e siano M e N due moduli proiettivi finitamente generati di rango 1. Per ogni $\mathfrak{m}$ fissiamo isomorfismi $\varphi_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}$, $\psi_{\mathfrak{m}} : N_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}$ e $\psi^*_{\mathfrak{m}} : N^*_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}$.

i) Si dimostri che se esiste $\sigma \in M$ tale che $\sigma_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m} M_{\mathfrak{m}}$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A, allora $M \simeq A$.
ii) Si dimostri che se esistono $\sigma \in M$ e $\tau \in N$ non nulli tali che si abbia $\varphi_{\mathfrak{m}}(\sigma) = u_{\mathfrak{m}} \psi_{\mathfrak{m}}(\tau)$ con $u_{\mathfrak{m}} \in A_{\mathfrak{m}}$ invertibile, allora $M \simeq N$.

Esercizio 82. Con le notazioni dell'esercizio 76. Si dia una presentazione per generatori e relazioni dei moduli M_a e si dimostri che $A^2 \simeq M_{-a} \oplus M_a$ per ogni a.

Esercizio 83. Con le notazioni dell'esercizio 76. Si dimostri che ogni A-modulo proiettivo finitamente generato di rango 1 è isomorfo ad M_a per un qualche a. (potrebbe essere utile l'esercizio 81)

Esercizio 84. Si costruisca una famiglia di moduli proiettivi di rango 1 non isomorfi tra di loro dell'anello $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 = x^3 + x^2)$, parametrizzata da $\mathbb{C}^*$. [Si può prendere spunto dall'esercizio 76]

Esercizio 85. Si descrivano tutti i moduli proiettivi finitamente generati di rango 1 sull'anello $\mathbb{C}[x, y]/(y^2 = x^3 + x^2)$. Se la famiglia costruita nell'esercizio precedente è quella "giusta" comprenderà tutti i moduli proiettivi di rango 1.

Esercizio 86. Sia $S = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo $\Bbbk$. Si dimostri che ogni S-modulo graduato finitamente generato ha una risoluzione libera di lunghezza al più n similmente a quanto fatto in classe per gli anelli locali noetheriani.

Esercizio 87. Sia $S = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi su un campo $\Bbbk$. Si dimostri che ogni S-modulo finitamente generato ha una risoluzione libera di lunghezza al più $n + 1$.