Esercizi di ripasso

Esercizio 1. Senza ricorrere alla calcolatrice disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$1,12 \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \sqrt{2}.$$

Esercizio 2. Partendo dalle definizioni date in classe dimostrare che $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

Esercizio 3. Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^3 - 2x^2 - x \geqslant 0$.

Esercizio 4. Trovare tutti i numeri reali x tali che $|2x - 1| = |x + 3|$.
Trovare tutti i numeri reali x tali che $x^2 - 2|x| + 1 = 0$.
Trovare tutti i numeri reali x tali che $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.

Esercizio 5. Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 - 2|x| + 1 > 0$.
Descrivere l'insieme dei numeri reali x tali che $x^2 + 2|x| + 1 > 0$.

Esercizio 6. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione.

Disuguaglianze

Esercizio 7. Dimostrare le seguenti disuguaglianze

a) $(a + b)^2 \leqslant 2(a^2 + b^2)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
b) $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;

Esercizio 8. Dimostrare che

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 9. Dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a + b + c)^2$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esercizio 10. Tra tutti i parallelepipedi di volume 1 quale è quello con superficie esterna minima?

Esercizio 11. Tra tutti i parallelepipedi di volune 1 quale è quello con la somma della lunghezza degli spigoli minima?

Esercizio 12. Dimostrare che per ogni intero $n \geqslant 1$ si ha

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}.$$

Esercizio 13. Siano a e b due numeri reali non negativi. Dimostrare che $a \geqslant b$ se e solo se $a^n \geqslant b^n$.

Esercizio 14. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \Big(\sum_{i=1}^{n} i\Big)^2$$

Esercizio 15. Dimostrare che per ogni numero reale $x \geqslant 1$ e per ogni naturale positivo n si ha

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leqslant \frac{x-1}{n}.$$

Esercizio 16. Siano $x, y \geqslant 0$ due numeri reali. Mostrare che $x \geqslant y$ se e solo se $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[n]{y}$.

1. Estremo superiore

Esercizio 17. a) Mostrare che se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ sono insieme non vuoti allora

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B.$$

Si forniscano esempi in cui le disuguaglianze sono strette ed esempi in cui non lo sono.
b) Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ allora $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Esercizio 18. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\};$$
$$B = \{\frac{2x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\};$$
$$C = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\};$$
$$D = \{x^2 + y^2 : x, y \in [0,1] \text{ e } x < y\};$$
$$E = \{x^2 - y^2 : 0 < y < x < 4\}.$$

Esercizio 19. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{a + b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \quad b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

Esercizio 20. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$B = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\};$$
$$C = \{\frac{n!}{n^n} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$D = \{\sqrt{n^2+1} - n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si ricorda che $n!$ è il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n, ad esempio $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Esercizio 21. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{3a + 4b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \ b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

Esercizio 22. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcolare estremo superiore ed inferiore della funzione f, e se esitono, massimo e minimo e punti di massimo e punti di minimo.

Numeri complessi

Esercizio 23. Calcolare $(i + i)^2$. Calcolare $(3, 4) \cdot (3, -4)$.

Esercizio 24. Calcolare l'inverso di $(1 + 2i)$ e di $(1 + i)$.

Esercizio 25. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di -1.

Esercizio 26. Risolvere l'equazione $t^2 + 2t + 10 = 0$. Calcolare parte reale e parte immaginaria degli z tali che $z^2 = 5 + 12i$.

Esercizio 27. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 28. Dato un numero naturale n, descrivere tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 1$ e tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 2$.

Esercizio 29. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z-i}{z+i}$$

è un numero reale.

Esercizio 30. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 31. Dimostrare che per ogni numero reale θ,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esercizio 32. * Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati, determinare gli z tali che $bir(a, b, c, z)$ è un numero reale.

Esercizio 33. * Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

Esercizio 34. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z - \bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 35. 1) Calcolare $(1-i)^{24}$. 2) Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Successioni di Fibonacci

Esercizio 36. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n; \\ a_0 = 4; \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione sul modello di quanto abbiamo fatto con la successione di Fibonacci.

Esercizio 37. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}; \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Calcolare l'ennesimo termine della successione.

Esercizio 38. Determinare la successione x_n definita per induzione da

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 13x_{n-1} \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 39. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n; \\ a_0 = -1; \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione.

Limiti di successioni

Esercizio 40. Calcolare, se esiste, il limite delle successioni

$$\frac{n - 6n^4}{1 + n + n^4} \qquad \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^{n+1} - 2}$$

Esercizio 41. Sia a_n una successione di numeri reali. Dimostrare che se $\lim a_n = L$ con $L > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

Esercizio 42. Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali convergenti. Dimostrare che se $a_n \leqslant b_n$ definitivamente allora $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Esercizio 43. Dopo aver osservato che $0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$ dimostrare che $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Esercizio 44. Calcolare il limite della successione $\frac{2^n}{n!}$.

Esercizio 45. Sia $1 < a$. Dimostrare che $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. [Utilizzare la disuguaglianza dell'esercizio 15]. Dimostrare lo stesso risultato per $0 < a \leqslant 1$.

Esercizio 46. Si enuncino e dimostrino l'analogo dei punti 1,2,3 della proposizione dimostrata a lezione nel caso in cui il limite di a_n sia $-\infty$.

Esercizio 47. Sia a_n una sucessione a termini positivi e sia $\lim a_n = L$. Allora $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

Esercizio 48. Si calcoli il limite delle seguenti successioni:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad \frac{3^n+n^2}{2^n+n^3} \qquad \sqrt[n]{2^n+3^n} \qquad (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n.$$

Esercizio 49. Sia $a_n < 0$ per ogni n e sia $\lim a_n = 0$. Si dimostri che $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Esercizio 50. Dare un esempio di una successione a_n tale che $a_n \neq 0$ per ogni n, $\lim a_n = 0$ e non esiste il limite di $\frac{1}{a_n}$.

Esercizio 51. Sia F_n la successione di Fibonacci. Si calcoli il limite di $\sqrt[n]{F_n}$.

Esercizio 52. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \\ a_0 = 3; \\ a_1 = 11. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione e calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 53. Sia $0 < \alpha < 1$ un numero reale fissato e sia a_n la succesione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) \end{cases}$$

Dimostrare che la successione è decrescente, e limitata. Se ne calcoli il limite.

Esercizio 54. Si dimostri che $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. [dimostrare usando la disuguaglianza aritmogeometrica che per $n \geqslant 2$ si ha $\sqrt[n]{x} \leqslant 1 + \frac{2}{n}(\sqrt{2} - n)$]

Esercizio 55. Determinare, se esiste, il limite della successioni

$$\sqrt[n]{\frac{3^n+n^2}{5^n+2^n}} \qquad \sqrt[n]{3^{2n}n^3} \qquad \frac{(n+1)!-n!}{n^2\,3^n}.$$

Esercizio 56. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}; \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che $a_n \leqslant 2$ per ogni n e che la successione è crescente. Si calcoli il limite della successione.

Esercizio 57.

a) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = 3$.
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = -\infty$.
c) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = \infty$.

Esercizio 58.

a) Sia a_n una successione convergente e sia $\lim a_n = \ell > 0$. Dimostrare che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.
b) Dare un esempio di una successione a termini positivi con $\lim a_n = \infty$ e tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Esercizio 59.

a) Siano a_n due successioni convergenti con $a_n \leqslant b_n$ per ogni n. Si dimostri che $\lim a_n \leqslant \lim b_n$;
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n talli che $a_n < b_n$ per ogni n e $\lim a_n = \lim b_n$.

Esercizio 60.

a) Sia a_n una successione convergente (ovvero che ha limite finito). Dimostrare che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.
b) Si dimostri che la successione a_n definita da

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

è tale che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ ma $\lim a_n = \infty$.

Esercizio 61. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la monotonia e la convergenza della successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2; \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 62. Sia a_n una successione con limite finito ℓ. Sia b_n la successione definita da

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si dimostri che $\lim b_n = \ell$.

Esercizio 63. Sia a_n la successione $(-1)^n n$. Calcolare il limite delle sottosuccesioni di a_n a_{2n} e a_{2n+1}.

Esercizio 64. Descrivere una successione che non ha limite e tale che le sottosuccessioni a_{3n} e a_{3n+1} hanno limite finito e diverso e la sottosuccessione a_{3n+2} ha limite infinito.

Esercizio 65. Sia a_n una successione. Supponiamo che a_n abbia una sottosuccessione $a_{k(n)}$ che ha limite 2 e una sottosuccessione $a_{h(n)}$ che ha limite 3. Dimostrare che a_n non ha limite.

Esercizio 66 (Gara di divergenza)**.** Usando (una sola volta) i simboli

$$! \; n \; 2$$

e parentesi a piacere, costruire la successione una successione che tende a infinito molto velocemente.

Esercizio 67. Siano a_n e b_n due successioni mai nulle tali che $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Si può dire qualcosa del limite di

$$\frac{a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2}?$$

Giustificare la risposta con una dimostrazione o con degli esempi?

Esercizio 68. Sia a_n la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right); \\ a_0 = 12345. \end{cases}$$

Si dimostri che la successione è decrescente e se ne calcoli il limite.

Esercizio 69. Si consideri la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}; \\ a_0 = a \end{cases}$$

Si calcoli il limite della successione al variare di $a \in [2, \infty)$.

Limiti e studio di funzioni: prima parte (senza derivate)

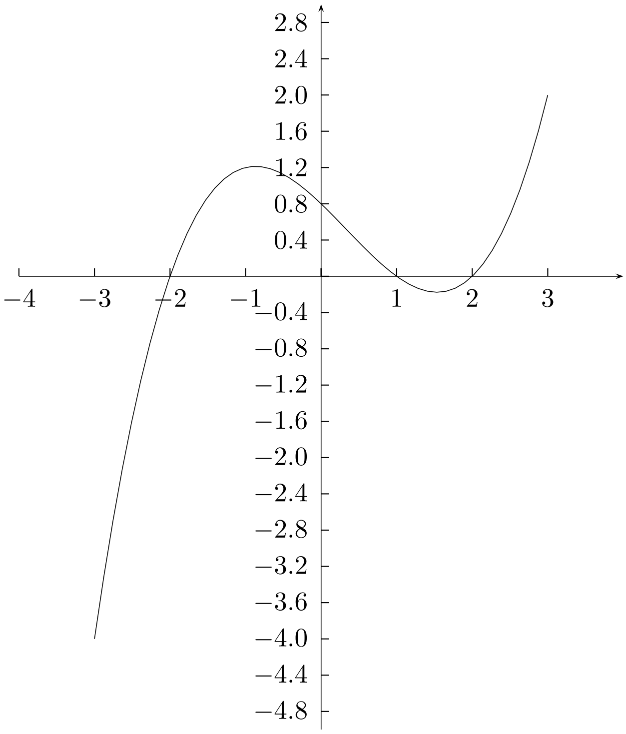
Esercizio 70. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$;
(2) $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 2$;
(3) f sia crescente nell'intervallo $[3, \infty)$ e decrescente nell'intervallo $(-\infty, 3]$

Esercizio 71. (1) Esplicitare la definizione di limite nel caso $x_0 = \infty$ e L finito o infinito.
(2) Esplicitare cosa vuol dire che non è vero che $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$

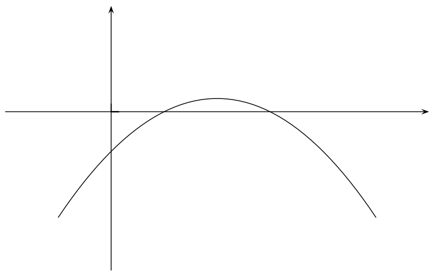
Esercizio 72. * Sia a_n una successione che non ha limite. Si dimostri che esiste una sottosuccessione di a_n con limite diverso da $+\infty$.

Esercizio 73. Sia $f : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con il seguente grafico:



i) Qual'è l'immagine di f?
ii) Dire se f è iniettiva.
iii) Quanto vale $f(0)$?
iv) Per quali valori la funzione è zero?
v) Per quali valori la funzione è positiva?
vi) In quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente?

Esercizio 74. Si consideri la seguente figura,



Di quale funzione potrebbe essere il grafico?

i) $f(x) = 3x + 2$;
ii) $f(x) = x^2 - 2x - \frac{3}{4}$;
iii) $f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{5}$;
iv) $f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{4}$;
v) $f(x) = -x^2 - 1$.

Esercizio 75. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa

$$f(x) = \frac{4x+3}{x}.$$

Dimostrare che è decrescente e calcolarne l'immagine.

Esercizio 76. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Si dimostri che (se esiste) il limite $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)$ è unico. Cosa succederebbe se uno estendesse la definizione di limite al coaso in cui x tenda ad un punto che non è di accumulazione per A?

Esercizio 77. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{|x|}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{|x+2|-|x|-2}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2x}}\qquad \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}-1}{\sin x-1}$$

[Se necessario si può fare uso del risultato dell'esercizio 68 che è una variante del corollario dimostrato in classe.]

Esercizio 78. a) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

b) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

c) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$

d) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e non esiste $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Esercizio 79. Sia $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=L\in\mathbb{R}$. Sia $B=A\cup\{x_0\}$ e sia $g:B\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0;\\ L & \text{se } x=x_0.\end{cases}$$

Dimostrare che g è continua in x_0.

Esercizio 80. Dimostrare che se $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$ allora $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

Esercizio 81. Sia $sgn(x)$ la funzione definita nel modo seguente:

$$sgn(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x\longrightarrow 0}|sgn(x)|$. Dire se $|sgn(x)|$ è continua in 0.

Esercizio 82. Siano $A,B\subset\mathbb{R}$ e sia $f:A\longrightarrow B$ e $g:B\longrightarrow\mathbb{R}$. Sia $x_0\in A$. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=y_0$. Sia $y_0\notin B$ un punto di accumulazione di B e sia $\lim_{y\longrightarrow y_0} g(y)=L$. Allora

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} g\circ f(x)=L.$$

Esercizio 83. Nell'esercizio precedente cosa può succedere se $y_0\in B$?

Esercizio 84. Sia $A\subset\mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Sia $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=L$ se e solo se per ogni successione a_n a valori in $A\smallsetminus\{x_0\}$ con $\lim a_n=x_0$ si ha $\lim f(a_n)=L$.

Esercizio 85. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (quelli della prima riga sono più semplici, in questo caso specificare bene i risultati necessari per giustificare la risposta, quelli della seconda riga sono più complicati, e si può essere più sintetici nella risposta, per la terza riga si ricordi che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\sin(e^x-e)\qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log x-4}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+3}{e^{\frac{1}{x}}+1}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{e^{2\frac{1}{x}}+1}-e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{-x}-1}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3x}{1-e^{2x}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$$

Esercizio 86. Si calcolino i seguenti limiti (si ricordi anche che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{x^2+2x}-x \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+2(e^x+3)}-3}{x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} \qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{\log x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\sin x)}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x\sin(e^{-x}\sin x)}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^4(\frac{3x}{2})}{e^{x^4}-\sqrt{3x^4+1}}$$

Esercizio 87. In relazione alla funzione dell'esercizio 59, dire quali sono i punti di massimo, minimo, massimo locale e minimo locale. Dire inoltre quale è il massimo e il minimo di f.

Continuità

Esercizio 88. Dare un esempio di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e di una funzione $f : A \longrightarrow [0,1]$ bigettiva tale che l'inversa non sia una funzione continua.

Esercizio 89. * Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ una funzione bigettiva e crescente (in particolare continua). Sia $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'inversa di f. Si dimostri che

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f^{-1}(x) = -\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow\infty} f^{-1}(x) = \infty.$$

Esercizio 90. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado 7. Dimostrare che esiste x_0 tale che $f(x_0) = 0$.

Esercizio 91. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Dire se è possibile definire una funzione $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \neq 0$. (usare l'esercizio 65)

Esercizio 92. Sia $f(x) = x^3 + e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x) = 0$.

Esercizio 93. * Sia $f(x) = x^2 + e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x) = 2$.

Esercizio 94.
(1) Dare un esempio di una funzione continua definita su un intervallo limitato che non ha massimo.
(2) Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato che non ha massimo.

Esercizio 95. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(sappiamo che questo è vero se facciamo il limite sugli interi, ridursi a quel caso considerando la parte intera di x).

Esercizio 96. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x}{x^k} = \infty.$$

(procede come per l'esercizio precedente.)

Esercizio 97. Dare un esempio di una funzione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua che assume valori positivi e negativi ma non il valore zero.

Esercizio 98. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà. A è limitato e ogni punto di accumulazione di A appartiene ad A. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f ammette massimo e minimo.

Esercizio 99. Cosa è un punto di accumulazione di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$.

Esercizio 100. Dare la definizione di funzione crescente, decrescente, non crescente, non decrescente.

Esercizio 101. Dare la definizione di punto di massimo e minimo e di punto di massimo e minimo locale.

Esercizio 102. Si dimostri che se $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$ e se $g(x) \geqslant 1$ per ogni x allora $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)g(x) = \infty$.

Esercizio 103. Si dia la definzione di funzione convessa e sia dia un esempio di funzione convessa e di una funzione non convessa.

Esercizio 104. * Siano $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numeri reali. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = 0.$$

Esercizio 105. * Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si dimostri che f è continua.

Esercizio 106. Si dia un esempio di una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa ma non continua.

Derivate e studio di funzioni

Esercizio 107. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$a(x) = x^{100} - x^{50} + 1 \qquad b(x) = \frac{x^10 - 5x^5 + 1}{3x^9 - 9x^3}$$

$$c(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad d(x) = x \sin(x + \log x)$$

$$e(x) = e^{\cos^2 x} = e^{(\cos x)^2} \qquad f(x) = e^{\cos(x^2)}$$

$$g(x) = a^x \qquad h(x) = x^a$$

$$k(x) = x^x \qquad \ell(x) = \log(\sin(\cos x))$$

Esercizio 108. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log |x|$. Si dimostri che

$$Df(x) = \frac{1}{x}$$

Esercizio 109. Si dimostri che la funzione $|x|$ non è derivabile in 0.

Esercizio 110. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \neq 0$.

Esercizio 111. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. f è una funzione derivabile e bigettiva. In quali punti la funzione inversa $g(x) = \sqrt[3]{(x)}$ è derivabile? Quanto vale la sua derivata?

Esercizio 112. Si studino le seguenti funzioni

(1) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
(2) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$;
(3) $h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$;
(4) $k(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$;
(5) $\ell(x) = \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Esercizio 113. Determinare, se esistono, massimo e minimo delle funzioni

(1) $f(x) = \log x - \log^2 x$,
(2) $g(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right)$.

Esercizio 114. Si consideri la funzione $f : [0, 2] \longrightarrow [1, 5]$. definita da $f(x) = x^2 + 1$. Si dimostri che è invertibile e si calcoli $Df^{-1}(2)$.

Esercizio 115. Sia $f : [0, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 116. Sia $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \cos x$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 117. Sia $m \in \mathbb{R}$. Determinare per quali $q \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x = mx + q$$

ha nessuna, una o due soluzioni.

Esercizio 118. Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$. Dimostrare che $f(b) \neq f(a)$.

Esercizio 119. sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $c \in (a, b)$ e sia f derivabile in ogni $x \neq c$. Supponiamo che esista finito $\ell = \lim_{x \longrightarrow c} f'(x)$. Allora f è deriviabile in c e $f'(c) = \ell$.

Esercizio 120. * Dare un esempio di due funzioni continue f, g e derivabili su un intervallo chiuso $[a, b]$ tali che $g(b) \neq g(a)$ e per le quali non esiste c interno all'intervallo tale che
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Esercizio 121. Dimostrare che per ogni $x > 0$ risulta $xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$.

Esercizio 122. Calcolare i seguenti limiti usando la regola di de l'Hopital o l'approssimazione delle funzioni con i polinomi di Taylor.
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\sin x^2}$$
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{(\sin x)^2} \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

Esercizio 123. Dimostrare che esiste un unico reale x_0 per il quale si annulla la funzione
$$f(x) = \frac{x - 1}{1 + x^2} + \arctan x.$$

Esercizio 124. Dare un esempio di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che sia derivabile due volte ma non tre.

Polinomi di Taylor

Esercizio 125. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:
$$a(x) = (\sin x)^2 \qquad b(x) = \sin x^2$$
$$c(x) = \tan x \qquad d(x) = 3^{x+1}$$

Esercizio 126. Determinare un numero reale α tale che
$$\tan(x^3) - (\tan x)^3 = \alpha x^5 + o(x^5).$$

Esercizio 127. Sia $f(x)$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0; \\ (\sin x)^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Dire quante volte la funzione è derivabile.

Esercizio 128. * Sia $f(x)$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0; \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
Dimostrare che f è derivabile infinite volte e che tutte le sue derivate in 0 si annullano.

Esercizio 129. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:
$$e(x) = x(\sin x)^2 \tan x \qquad f(x) = \sin x \log(1 + x)$$
$$g(x) = \log(1 - x^2) \qquad h(x) = \log(1 - x^2)$$

Esercizio 130. Calcolare i seguenti limiti:
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4x^2 - 4}{x^4}$$

Esercizio 131. Determinare un numero reale α tale che
$$(\arctan x)^5 - 2(\sin x)^5 + x^5 = \alpha x^9 + o(x^9)$$

Esercizio 132. Stimare $\sin 1$ con un errore massimo di $0,01$.

Esercizio 133. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di 0 Dimostrare le seguenti affermazioni
(1) se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ allora $f = o(h)$;
(2) se $g\, o(f) = o(fg)$.

Esercizio 134. Stimare $\log \frac{3}{2}$ con un errore inferiore a $0,1$.

Esercizio 135. Sia $a \neq 0$. Calcolare la primitiva di $\frac{1}{(ax+b)^m}$. [porre $y = ax + b$]

Esercizio 136. Calcolare
$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-1} dx$$
[scrivere $\frac{1}{x^2-1}$ nella forma $\frac{1}{ax+b} + \frac{1}{cx+d}$]

Esercizio 137. Calcolare
$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x-1} dx.$$
[Scrivere $3x^2$ nella forma $(ax+b)(x-1)+c$]

Esercizio 138. Sia $I_n = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$. Integrando per parti trovare una formula che metta in relazione I_n e I_{n+1}.

Esercizio 139. Usando il risultato dell'esercizio precedente scrivere la primitiva di $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Esercizio 140. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx$$
[$y = x^4$]

Esercizio 141. Si calcolino i seguenti integrali
$$a) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 \, dx \qquad b) \int_0^1 x^3 \sqrt{2-x^2} \, dx$$

Esercizio 142. Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni:

$a) e^{e^x + x}$ $\qquad$ [$y = e^x ...$]

$b) \dfrac{1}{e^{2x} - 2e^x}$

$c) \sin(\sqrt{x})$ $\qquad$ [$y = \sqrt{x} ...$]

$d) \dfrac{\sin 2x + \cos x}{1 + \sin x}$ $\qquad$ [$y = \sin x \, ricordarsi \, \sin 2x = 2 \sin x \cos x$]

$e) \dfrac{1}{x(x-1)}$

$f) \dfrac{1}{x^2(1+x)}$

$g) \dfrac{x+3}{x^3+3x^2+2x}$

$h) \dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-1)^2}$

$i) \dfrac{1}{x^3(1+x)^2}$

$j) \dfrac{1}{x^2-2x+2}$

$k) \dfrac{1}{x^4-1}$

$l) x^5 e^{-x^3}$

Esercizio 143. Sia F la funzione definita nel seguente modo:
$$F(x) = \int_0^x (1 + e^{-t^2})(4 - t^2) dt$$
Si calcoli la derivata di F. Si determino gli intervalli in cui F é crescente o decrescente. Si determini il numero degli zeri di F.

Esercizio 144. Sia F la funzione definita nel seguente modo:

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$$

Si determini la derivata di F.

Integrali improri

Esercizio 145. Per quali valori di α è definito $\int_0^\infty e^{-\alpha x} dx$.

Esercizio 146. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$a) \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\, dx \qquad b) \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\, dx \qquad c) \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(2x+1)}\, dx$$

Esercizio 147. Dire per quali valori di a, b il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a(4x+9)^b}\, dx.$$

Esercizio 148. Dire se i seguenti integrali impropri convergono:

$$a) \int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\, dx \qquad b) \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\, dx \qquad c) \int_\infty^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\, dx$$

Esercizio 149. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^a}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$$

Esercizio 150. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_a^\infty \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\, dx$$

Esercizio 151. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^\infty t^a e^{-t}\, dt$$

Serie

Esercizio 152. Discutere la convergenza delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=0}^\infty \frac{n}{2^n} \qquad b) \sum_{n=0}^\infty \frac{3^n}{n^2} \qquad c) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$d) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}} \qquad e) \sum_{n=0}^\infty \frac{n!}{(2n)!} \qquad f) \sum_{n=1}^\infty \frac{1+\cdots+n}{n^3}$$

Esercizio 153. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche (o quasi)

$$a) \sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad b) \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2-1} \qquad c) \sum_{n=1}^\infty \frac{n+\frac{1}{2}}{n^2(n+1)^2}$$

Esercizio 154. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^\infty \frac{n^2}{x^n}$ converge.

Esercizio 155. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^\infty \frac{e^{nx}}{n}$ converge.

Esercizio 156. Discutere la convergenza delle seguenti serie

$$a) \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) \qquad b) \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^2-n} \qquad c) \sum_{n=0}^\infty \sqrt{ne^{-n}}$$

$$d) \sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{n^n} \qquad e) \sum_{n=1}^\infty \frac{\log n!}{n^3}$$

Esercizio 157. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \log(1 + \frac{(-1)^n}{n}) \qquad b) \sum_{n=2}^{\infty} \sin(\frac{(-1)^n}{\log n})$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \log n}) \qquad d) \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{\pi}{2} - \arctan n)$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} (\log(1+n) - \log n - \frac{1}{n}) \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$$

Per il punto a) e b) e c) usare il criterio di Leibniz (per il punto a) per dimostrare che la successione a termini positivi associata è decrescente separare il caso n pari da n dispari, per il punto c) studiare la funzione $f(x) = x - \log x$). Per il punto d) dimostrare che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 158. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} x^n \qquad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} x^n \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-2)^n) x^n \qquad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1} x^n \qquad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}} x^n$$

Esercizio 159. Calcolare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 \frac{1}{3^n}$. [usare le derivate...]