## Verifica intermedia del 7 novembre 2012

**Esercizio 1.** Sia $a_n$ la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 18. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

**Esercizio 1bis.** (Variante del primo esercizio) Sia $a_n$ la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 35a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 9. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

**Esercizio 2.**

(a) Si dia un esempio di una successione $a_n$ con termini diversi da zero tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim \frac{a_n}{n} = +\infty$;
(b) Sia $a_n$ una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ si dimostri che $\lim a_n = 0$.

**Esercizio 3.** Sia $a_n$ una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = +\infty$. È sempre vero che esiste il limite (finito o infinito) della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

## Soluzioni degli esercizi della prova intermedia

**Commento alle soluzioni.** Il compito è stato pensato più come un test di autovalutazione (per questo vale solo 10 punti su 100) che come una valutazione che secondo me in questo mese dell'anno non ha ancora molto senso.

Queste sono alcune indicazioni che possono essere utili per l'autovalutazione.

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio non sta studiando a sufficienza o ha una preparazione di base che deve rafforzare;
(2) chi ha fatto il primo esercizio ma si è sentito perso nel resto del compito senza riuscire a fare altro, anche se sta studiando, in prospettiva deve capire le cose più a fondo e forse cambiare un poco il modo in cui studiare. Siamo all'inizio dell'anno e c'è tutto il tempo per farlo, però deve cercare di fare un qualche salto di qualità. A fine corso, una preparazione che permette di fare gli esercizi per la cui soluzione si è più o meno fornito un algoritmo risolutivo a lezione, senza una comprensione concettuale più profonda, potrebbe non essere sufficiente per passare l'esame.
(3) chi ha fatto il primo esercizio e il punto (a) del secondo esercizio, secondo me sta studiando e ha fondamentalmente capito anche le cose che abbiamo fatto. Deve forse solo entrare un po' di più in alcuni modi di ragionare e nel linguaggio che man mano si farà un po' più pesante. In altre parole direi deve fare attenzione un po' di più alla parte teorica cercando di capirne la struttura e le idee;
(4) chi ha fatto più di questo secondo me sta già studiando bene. Se non ha fatto tutto non mi preoccuperei, è solo mancata un poco di esperienza, ma piano piano sicuramente la svilupperà.

Naturalmente ci possono essere mille altre possibile combinazioni. Aldilà di come è andato il compito conta anche quanto vi sembra di essere lontani dalle soluzioni.

**Soluzione esercizio 1 (prima versione).** Cerchiamo le successioni $b_n$ non nulle della forma $\lambda^n$ che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 20b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 2$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se $b_n$ e $c_n$ risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi $a_n$ della forma $a_n = B\,10^n + C\,2^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 18$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 10\,B + 2\,C = 18 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 10^n - 2^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n - 2^n} = \sqrt[n]{10^n \left(2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n\right)} = 10 \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione se una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 10$.

**Soluzione esercizio 1 (seconda versione).** Cerchiamo le successioni $b_n$ non nulle della forma $\lambda^n$ che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12 b_{n+1} - 35 b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 5$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se $b_n$ e $c_n$ risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi $a_n$ della forma $a_n = B\,7^n + C\,5^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 9$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 7\,B + 5\,C = 9 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 7^n - 5^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n - 5^n} = \sqrt[n]{7^n \left(2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right)} = 7 \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione su una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 7$.

**Soluzione esercizio 2.** La successione

$$a_n = n^2$$

ha le proprietá richieste nel punto (a).

Dimostriamo adesso l'affermazione del punto (b). Da $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ricaviamo che esiste $n_0$ tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ per $n \geqslant n_0$. Da questa equazione ricaviamo $0 < a_{n+1} < \frac{3}{4} a_n$ per $n \geqslant n_0$ e quindi per induzione

$$0 < a_n < a_{n_0} (\frac{3}{4})^{n - n_0}$$

per ogni $n \geqslant n_0$. Abbiamo cosí dimostrato che la successione $a_n$ è definitivamente compresa tra due successioni che tendono a 0, quindi tende anche essa a 0.

**Soluzione esercizio 3.** Costruiamo una successione $a_n$ tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$ e per la quale non esiste il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Definiamo

$$a_n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ (n+1)^{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare $a_n \geqslant n^n$ e quindi $\frac{a_n}{n!} > \frac{n^n}{n!}$ da cui $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$.

Inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{(n+2)^{n+2}}{n^n} > n^2 & \text{se } n \text{ é pari;} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare non esiste il limite della succesione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

## II compitino, 21 dicembre 2012

**Esercizio 1.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x}.$$

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2} a_n + \frac{3}{2}; \\ a_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Se ne calcoli il limite.

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Cosa vuol dire che $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$? (scrivere la definizione per esteso e stando attenti ai dettagli);
b) Dimostrare, usando solo la definizione, che se $\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = 3$ allora $\lim_{x\longrightarrow 0} f(2 + x^2) = 3$;
c) Dare un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{y\longrightarrow 0} g(y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\longrightarrow 0} g(f(x)) = 1.$$

**Esercizio 4.** Sia $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che esiste $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ e che tale limite è finito.

## Soluzioni del II compitino

**Commento alle soluzioni.** Valgono piò o meno commenti simili all'altra volta:

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio e il 3a) non sta studiando o sta studiando troppo poco;
(2) chi è riuscito a fare il 2a) ma non il 2b) deve studiare di più e con molta più attenzione la parte di teoria, il 2b) era un caso particolare di un teorema fatto a lezione in due forme diverse. Come indicazione generale i teoremi fatti a lezione uno si aspetta che li sappiate piuttosto bene;
(3) il secondo esercizio lo considero un esercizio medio, standard ma non facilissimo perché la strategia è più articolata rispetto, per esempio, al primo esercizio. Diciamo come parte facile mi sarei aspettato che trasparisse un minimo una strategia;
(4) dai risultati la mia impressione generale è che in linea di massima venga presa un poco sottogamba la parte più concettuale del corso, come, per esempio, non sapere definizione fondamentali come quella di limite.

**Soluzione esercizio 1.** Razionalizzando l'espressione otteniamo

$$\frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x} = \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{(\sqrt{e^x + 3} + 2)}$$

Per $x$ che tende a zero, sappiamo che il primo termine di questa espressione tende ad 1. Il numeratore del secondo termine tende ad 1 ed il denominatore, essendo la funzione esponenziale e la radice quadrata funzioni continue tende a $\sqrt{e^0 + 3} + 2 = 4$. Quindi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x} = \frac{1}{4}.$$

**Soluzione esercizio 2.** Dimostriamo che la successione è decrescente e limitata. Studiamo quando $a_{n+1} < a_n$. Se indichiamo $a_n$ con $x$ otteniamo

$$x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < x \quad \text{ovvero} \quad (x - 1)(x - \frac{3}{2}) < 0$$

ovvero $x \in (1, \frac{3}{2}) = I$. Quindi se $1 < a_n < \frac{3}{2}$ allora $a_{n+1} < a_n$.

Dimostriamo per induzione che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ per ogni $n$. Per $n = 1$ è vero. Per $n \geqslant 1$ supponiamo che $a_n \in (1, \frac{3}{2})$ e dimostriamo che $a_{n+1} \in (1, \frac{3}{2})$. Se indichiamo $a_n$ con $x$ otteniamo $1 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ ovvero

$$0 < x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x^2 - \frac{3}{2}x < 0$$

la prima disequazione è equivalente a $x < \frac{1}{2}$ o $x > 1$ e la seconda a $x \in (0, \frac{3}{2})$. Entrambe sono verificate per $x \in (1, \frac{3}{2})$.

Quindi esiste il limite della successione e lo indichiamo con $\ell$. Inoltre essendo la successione decrescente e maggiore di 1 sappiamo che $\ell$ è maggiore o uguale a 1 e minore di $\frac{5}{4}$.

Facendo il limite a destra e sinistra dell'equazione $a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}$ otteniamo $\ell = \ell^2 - \frac{3}{2}\ell + \frac{3}{2}$ ovvero $\ell = 1$ o $\ell = \frac{3}{2}$. Poiché il limite è minore o uguale a $\frac{5}{4}$ otteniamo $\ell = 1$.

**Soluzione esercizio 3.** a) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, allora il limite per $x$ che tende a 2 della funzione $f(x)$ è uguale a 3 se e solo se (la risposta inizia qui) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \neq 2$ e $|x - 2| < \delta$ allora $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

b) Sia $\varepsilon > 0$, allora dalla definizione di limite sappiamo che esiste $\delta > 0$ tale che se $|y - 2| < \delta$ e $y \neq 2$ allora $|f(y) - 3| < \varepsilon$. Fissiamo un tale $\delta$.

Scegliamo adesso $\gamma = \sqrt{\delta}$ allora $\gamma > 0$ e per $|x| < \gamma$ abbiamo che $|x^2| < \delta$ quindi se poniamo $y = 2 + x^2$ abbiamo $|y - 2| = |x^2| < \delta$. Inoltre se $x \neq 0$ abbiamo $y \neq 2$, quindi se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(y) - 3| < \varepsilon$.

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\gamma > 0$ tale che se $|x| < \gamma$ e $x \neq 0$ allora $|f(2+x^2) - 3| < \varepsilon$, ovvero che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(2+x^2) = 3$.

c) Sia $f(x) = 0$ per ogni $x$ e sia $g(x)$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0; \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

In particolare abbiamo che $g \circ f(x) = 1$ per ogni $x$ e quindi le due funzioni soddisfano le richieste.

**Soluzione esercizio 4.** Sia $B = \{f(x) : x < 0\}$. Si noti che tale insieme è limitato superiormente da $f(0)$ perché $f(x) < f(0)$ per ogni $x < 0$ essendo la funzione crescente. Quindi $L = \sup B < \infty$. Dimostriamo che $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = L$.

Sia $\varepsilon > 0$. Per definizione di estremo superiore esiste $b \in B$ tale che $b > L - \varepsilon$. Sia $b = f(x_1)$ con $x_1 < 0$. Poniamo $\delta = -x_1$, quindi $\delta > 0$. Infine osserviamo che se $|x| < \delta$ e $x \neq 0$ e $x \in (0, \infty]$ allora abbiamo $x_1 < x < 0$, in particolare $f(x) \in B$, quindi

$$L - \varepsilon < f(x_1) < f(x) \leqslant L < L + \varepsilon$$

da cui $|f(x) - L| < \varepsilon$.

## Compitino 4 aprile 2013

**Esercizio 1.** Sia $z = 3 + 4i$ si calcolino $|z|$, $z^{-1}$ e $\bar{z}$.

**Esercizio 2.** Sia data la funzione:

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

Si descriva il dominio di definizione di $g$ e si dica se $g$ si possa estendere in modo continuo agli estremi del dominio di definizione. In caso tale estensione esista si dica inoltre se l'estensione è derivabile.

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Dare la definizione di "$f$ è derivabile in 0".
b) Si supponga che $f$ sia derivabile in 0 e si supponga che 0 sia un punto di massimo. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

**Esercizio 3.** Si consideri la funzione $f(x) = e^x - 3x^2$ e sia $g(x)$ la sua derivata.

a) Mostrare che la funzione $g(x)$ ha esattamente due zeri.
b) Quanti zeri ha la funzione $f(x)$?

**Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Si supponga che $f'(x) = 2$ per ogni $x$ e che $f(0) = 0$. Si dimostri che $f(x) = 2x$.

## Soluzioni

**Soluzione esercizio 1.** $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$\bar{z} = 3 - 4i$.
$z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

**Soluzione esercizio 2.** L'espressione che definisce $g$ è definita per $x \neq 0$ e $1 + x > 0$. Quindi

$$Dominio(g) = (-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Per $x$ che tende a $-1$ abbiamo che $1 + x$ tende a zero e quindi $\log(1+x)$ tende a $-\infty$ mentre $-x$ e $x^2$ tendono a 1. Quindi $g(x)$ tende a $-\infty$. In particolare la funzione $g$ non si può estendere con continuità in $-1$.

Per studiare il limite di $g$ per $x$ che tende a zero utilizziamo l'approssimazione di $\log(1+x)$ mediante i polinomi di Taylor. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In particolare la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $g(0) = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile per $x \neq 0$. Per studiare derivabilità dell'estensione in zero calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Per calcolare questo limite usiamo di nuovo l'approssimazione di $\log(1+x)$ questa volta con il polinomio di Taylor di terzo grado. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui per il limite del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione è derivabile

**Soluzione esercizio 3.** a) La funzione $f$ è derivabile in 0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

b) Sia 0 un punto di massimo per la funzione $f$ quindi $f(x) \geqslant f(0)$ per ogni $x$ ovvero $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per ogni $x$. Poiché la funzione è derivabile in zero esiste il rapporto incrementale e abbiamo che

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

Da $f(x) - f(0) \geqslant 0$ per $x < 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant 0.$$

Similmente per $x > 0$ otteniamo

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0 \text{ da cui } f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} \geqslant 0.$$

Quindi $f'(0) = 0$.

**Soluzione esercizio 4.** a) Derivando $f$ otteniamo $g(x) = e^x - 6x$. Per calcolarne il numero di zeri studiamo dove la funzione è crescente e dove è decrescente. Calcolando $g'(x)$ otteniamo $e^x - 6$ quindi $g'(x) > 0$ se e solo se $x > \log 6$ e $g'(x) < 0$ se e solo se $x < \log 6$. Da questo deduciamo che la funzione è decrescente in $(-\infty, \log 6]$ e crescente in $[\log 6, \infty)$. In particolare la funzione può avere al massimo due zeri. Inoltre osserviamo che $g(0) = 1 > 0$, che $\lim_{x \longrightarrow \infty} g(x) = \infty$ e che $g(\log 6) = 6 - 6 \log 6 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano $g$ ha esattamente due zeri che indichiamo con $x_1$ e $x_2$.

b) Dallo studio precedente ricaviamo che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty, x_1]$ e nell'intervallo $[x_2, \infty)$ e che è decrescente nell'intervallo $[x_1, x_2]$. Quindi al massimo $f$ ha tre zeri. Osserviamo inoltre che

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = e - 3 < 0$. Quindi per il teorema di Bolzano $f$ ha esattamente tre zeri.

**Soluzione esercizio 5.** Sia $x$ un punto diverso da zero. Per il teorema di Lagrange esiste $y$ compreso tra 0 e $x$ tale che

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(y) = 2.$$

Quindi, usando $f(0) = 0$, otteniamo $\frac{f(x)}{x} = 2$ da cui $f(x) = 2x$.

## Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, IV compitino, 29 maggio 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

**Esercizio.** Si dica se il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx.$$

**Esercizio.** a) Dare la definizione di serie convergente.

b) Sia $a_n$ una successione a termini positivi e sia $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$ per ogni $n$. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

**Esercizio.** Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + (\log x)^2)}.$$

**Esercizio.** Si dica per quali $x$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + n)x^n.$$

**Esercizio.** Sia $F(x)$ la funzione definita da $F(x) = \int_0^x \sin(t + t^2)\, dt$. Si calcoli

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2}.$$

Soluzioni

**Esercizio 1.** Osserviamo che nell'intervallo $(0, 1]$ la funzione $\sin x$ è continua e strettamente positiva, quindi lo è anche la funzione $1/\sin(x)$. Per determinare la convergenza dell'integrale la confrontiamo con la funzione $1/x$.

Osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi la convergenza dell'integrale proposto nell'esercizio è equivalente a quella dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ che sappiamo non convergere.

**Esercizio 2.** a) Sia $a_n$ una successione di numeri reali e sia $S_n$ la successione delle somme parziali di $a_n$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se esiste finito il limite della successione $S_n$.

b) Osserviamo che abbiamo $a_n \leqslant \frac{a_0}{2^n}$ per ogni $n$. Infatti ragionando per induzione otteniamo che per $n = 0$ questa affermazione é vera e se é vera per $n$ allora

$$a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n \leqslant \frac{1}{2} \frac{a_0}{2^n} = \frac{a_0}{2^{n+1}}$$

e quindi é vera anche per $n + 1$. Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{2^n}$ é convergente, per il criterio del confronto, otteniamo che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

**Esercizio 3.** Poniamo $y = \log x$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ da cui

$$\int \frac{1}{x(1 + (\log x)^2)} dx = \int \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(y) = \arctan(\log x).$$

**Esercizio 4.** Si tratta di una serie di potenze. Calcoliamo inanzittutto il raggio di convergenza. Per determinare il raggio di convergeza basta studiare il caso in cui $x > 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Calcoliamo il limite del rapporto di due termini successivi. Otteniamo

$$\lim \frac{(2^{n+1} + n + 1)x^{n+1}}{(2^n + n)x^n} = \lim \frac{2 + \frac{n+1}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} x = 2x$$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo che la serie converge per $0 \leqslant x < 1/2$ e diverge per $x > 1/2$. Quindi il raggio di convergenza è $1/2$. Inoltre per $x = \pm 1/2$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1 + \frac{n}{2^n})$$

il cui termine generale non tende a zero, quindi non è convergente.

Quindi la serie è convergente per $|x| < 1/2$ e non convergente altrimenti.

**Esercizio 5.** Osserviamo che $F$ è derivabile e che abbiamo $DF(x) = \sin(x + x^2)$. Inoltre $D^2F(x) = (1 + 2x)\cos(x + x^2)$. Quindi il polinomio di Taylor di secondo grado calcolato per $x = 0$ è il polinomio $P(x) = F(0) + DF(0)x + \frac{D^2F(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$ e quindi abbiamo $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Abbiamo quindi che $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1/2$.

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 3 giugno 2013

**Esercizio 1.** Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1}\, dx.$$

**Esercizio 2.** Determinare i punti di massimo e i punti di minimo della funzione $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da: da:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{2}}$$

**Esercizio 3.** Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n}).$$

**Esercizio 4.** Siano $F(x)$ e $G(x)$ le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_0^x F(t)\, dt$$

[si noti che l'integrale con il quale è definita $F$ è da 1 a $x$ e non da 0 a $x$.]

(1) quanti zeri ha la funzione $F$?
(2) quanti zeri ha la funzione $G$?

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell' 1 luglio 2013

**Esercizio 1.** Si dica se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x}\, dx.$$

**Esercizio 2.** Dire per quali $x$ la seguente serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^3 + 3} x^n.$$

**Esercizio 3.**

(1) Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire che $g$ è continua in 1 (dare la definizione).
(2) Sia $f$ la funzione definita da

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dire quanti zeri ha la funzione $f$.

**Esercizio 4.** Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Determinare il dominio di definizione di $f$ e dire se la funzione si può estendere con continuità agli estremi del dominio di definizione.

Si determinino inoltre i punti nei quali $f$ è derivabile.

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell'11 settembre 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

**Esercizio 1.** Calcolare la primitiva di $f(x) = \frac{1}{e^{2x}+1}$.

Calcolare, se converge, l'integrale improprio
$$\int_0^\infty \frac{1}{e^{2x}+1}\,dx.$$

**Esercizio 2.** Si dica se la seguente serie è convergente e se ne calcoli la somma
$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$
[Per calcolarne la somma può essere utile osservare che si può riscrivere la serie come una serie telescopica]

**Esercizio 3.** Per un numero reale $m$ si definisca la funzione $f_m$ mediante $f_m(x) = e^x - mx$. Si dimostri che per $m = e$ la funzione $f_e$ ha esattamente uno zero nell'intervallo $[0,1]$. Si determinino tutti i valori di $m$ per i quali $f_m$ ha almeno uno zero nell'intervallo $[0,1]$.

**Esercizio 4.** Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Si determinino il dominio di definizione, punti di massimo e minimo locale, estremo superiore ed estremo inferiore.

## Soluzioni del compito dell'11 settembre

**Esercizio 1.** Procedo per sostituzione. Pongo $y = e^{2x}$, da cui $dy = 2ydx$.
$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+y}dy = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1})dy$$
$$= \frac{1}{2}(\log y - \log y + 1) = x - \frac{\log(e^{2x}+1)}{2}$$
L'integrando è definito e continuo per ogni $x$ quindi per calcolare l'integrale improprio bisogna calcolare il limite
$$\lim_{r\longrightarrow\infty} \int_0^r \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \lim_{r\longrightarrow\infty} [r - \frac{\log(e^{2r}+1)}{2}]_0^r = \lim_{r\longrightarrow\infty} r - \frac{\log(e^{2r}+1)}{2} + \frac{\log 2}{2}.$$
Calcoliamo quindi il limite dei primi due termini di questa espressione.
$$\lim_{r\longrightarrow\infty} r - \frac{1}{2}\log(e^{2r}+1) = \lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\big(\log e^{2r} - \log(e^{2r}+1)\big) = \lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\log\big(\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}\big)$$
Infine osserviamo che $e^{2r}$ tende a più infinito e $\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}$ tende ad 1. Quindi $\lim_{r\longrightarrow\infty} \frac{1}{2}\log\big(\frac{e^{2r}}{e^{2r}+1}\big) = 0$.

In particolare l'integrale improprio converge a $\frac{\log 2}{2}$.

**Esercizio 2.** Si osservi che
$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$
si tratta quindi di una serie telescopica, ovvero di una serie il cui termine generale è della forma $a_n - a_{n+1}$. Nel caso in questione abbiamo $a_n = \frac{1}{n^2}$ e osserviamo che $\lim a_n = 0$. Quindi, per quanto mostrato a lezione, la serie converge e la sua somma è uguale al primo termine della serie che in questo caso è $a_1 = 1$.

**Esercizio 3.** Osserviamo che per ogni valore di $m$ la funzione $f_m$ è continua e derivabile. Abbiamo inoltre che la sua derivata è uguale a $e^x - m$.

In particolare osserviamo che per $m = e$ la derivata è negativa in $[0,1)$ e quindi la funzione è decrescente nell'intervallo $[0,1]$. Quindi $f$ non può avere più di uno zero. Infine $f_e(1) = 0$. Quindi ha esattamente uno zero.

In generale studiando il segno osserviamo che se $m \leqslant 0$ la funzione $f_m$ è crescente su tutta la retta reale.

Se invece $m > 0$ osserviamo che $f_m$ è decrescente per $x < \log m$ e crescente per $x > \log m$ in particolare $\log m$ è un punto di minimo assoluto.

In particolare ne ricaviamo che

(1) se $m \leqslant 1$ la funzione è decrescente in $[0,1]$;
(2) se $1 < m < e$ allora $0 < \log m < 1$ e quindi la funzione ha un punto di minimo assoluto in $\log m \in [0,1]$;

(3) se $m \geqslant e$ allora la funzione è decrescente in $[0,1]$.

Nel primo caso osserviamo che essendo $f_m(0) = 1$ avremo $f_m$ maggiore di zero in $[0,1]$.

Nel secondo caso osserviamo che nel punto di minimo abbiamo

$$f_m(\log m) = m(1 - \log m) > 0$$

e quindi la funzione è sempre positiva.

Nel terzo caso osserviamo che $f_m(0) = 1$ e $f_m(1) = e - m < 0$ e quindi per il teorema di Bolzano la funzione ha almeno uno zero nell'intervallo $[0,1]$.

**Esercizio 4.** La funzione è definita per $\sin x \neq \cos x$ ovvero per $x \neq \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. Osserviamo inoltre che per $x \longrightarrow (\pi/4)^-$ abbiamo che $\sin x \longrightarrow (1/\sqrt{2})^-$ e $\cos x \longrightarrow (1/\sqrt{2})^+$ quindi $1/(\sin x - \cos x)$ tende a $-\infty$. Similmente per $x$ che tende a $(\pi/4)^+$ otteniamo che la funzione tende a $+\infty$. Quindi estremo superiore ed inferiore sono $\infty$ e $-\infty$.

Per determinare i punti di massimo e minimo locale studiamo calcoliamo la derivata:

$$f'(x) = -\frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

Il segno della derivata è quindi opposto al segno di $\sin x + \cos x$. Abbiamo quindi che $f$ è decrescente negli intervalli $[0, \pi/4)$, $(\pi/4, 3\pi/4]$ e in $[7\pi/4, 2\pi]$ e che è crescente negli intervalli $[3\pi/4, 5\pi/4)$, $(5\pi/4, 7\pi/4]$.

Abbiamo quindi che $3\pi/4$ e $2\pi$ sono gli unici punti di minimo locale e 0 e $7\pi/4$ gli unici punti di massimo locale.

## Verifica intermedia di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 6 novembre 2013

**Esercizio 1.**

(1) Calcolare il prodotto dei numeri complessi $1 + 3i$ e $1 - 7i$;
(2) calcolare modulo e coniugato del numero complesso $3 + 4i$;
(3) calcolare la parte reale e la parte immaginaria dell'inverso di $1 + 2i$.
(4) derminare tutti i numeri complessi $z$ tali che $z^3 = \overline{z}$.

**Esercizio 2.**

(1) Dare la definizione di estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia non vuoto e che sia limitato superiormente;
(2) fare un esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ha estremo superiore uguale ad 1 e che non ha massimo.

**Esercizio 3.** Dimostrare che $2^n + 3^n \leqslant 4^n$ per ogni $n$ intero e $n \geqslant 2$.

## Soluzioni della verifica intermedia del 6 novembre 2013

**Esercizio 1.**

$$(1 + 3i) \cdot (1 - 7i) = 1 + 21 + 3i - 7i = 22 - 4i.$$
$$|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$
$$\overline{3 + 4i} = 3 - 4i$$
$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1}{1 + 2i} \cdot \frac{1 - 2i}{1 - 2i} = \frac{1 - 2i}{5}.$$

quindi la parte reale e la parte immaginaria dell'inverso di $1 + 2i$ sono uguali a $1/5$ e a $-2/5$.

Per studiare l'equazione $z^3 = \overline{z}$ osserviamo inanzitutto che $z = 0$ è una soluzione. Per $z \neq 0$ scriviamo $z$ nella forma $z = Re^{i\theta}$ con $R \in \mathbb{R}_+$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Abbiamo $z^3 = R^3 e^{3i\theta}$ e $\overline{z} = R^{-i\theta}$. L'equazione iniziale è quindi equivalente al sistema

$$R^3 = R \qquad \text{e } 3\theta = -\theta + 2k\pi$$

con $k$ intero. Da questo sistema, ricordando che stiamo assumendo $R > 0$ ricaviamo $R = 1$ e

$$\theta = \frac{2\pi}{4} k$$

per $k$ intero. Per ottenere tutti i possibili valori distinti di $z$ basta scegliere $k = 0, 1, 2, 3$. Abbiamo quindi che le soluzioni sono

$$z = 0 \qquad z = 1 \qquad z = e^{\frac{\pi i}{2}} = i \qquad z = e^{\pi i} = -1 \qquad z = e^{\frac{3\pi i}{2}} = -i.$$

**Esercizio 2.** 1) Sia $A$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia non vuoto e limitato superiormente. Sia $B$ l'insieme dei maggioranti di $A$ ovvero l'insieme degli elementi $x \in \mathbb{R}$ tali che $x \geqslant a$ per ogni $a \in A$. Allora l'insieme $B$ ha minimo e l'estremo superiore di $A$ è definito come il minimo dell'insieme $B$.

2) Sia $A = [0, 1)$. Allora l'estremo superiore è uguale a 1 e $A$ non ha massimo.

**Esercizio 3.** Passo base: per $n = 2$ l'affermazione è vera. Infatti $2^2 + 3^2 = 13 < 4^2$.

Passo induttivo. Supponiamo adesso che l'affermazione sia vera per un numero $n \geqslant 2$ e dimostriamola per $n + 1$. Abbiamo

$$2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \leqslant 4 \cdot 2^n + 4 \cdot 3^n = 4 \cdot (2^n + 3^n) \leqslant 4 \cdot 4^n = 4^{n+1}.$$

## Compito di Analisi Matematica, appello staordinario, 6 novembre 2013

**Esercizio 1.** Sia $x_n$ la successione definita per ricorrenza da

$$x_1 = \frac{8}{5}, \qquad x_{n+1} = \frac{8\,x_n}{3\,x_n + 2}.$$

- Provare per induzione che $x_n = 2\frac{4^n}{4^n+1}$;
- Calcolare (se esistono) massimo e minimo, estremo superiore ed inferiore;
- Calcolare il limite della successione.

**Esercizio 2.** Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\left|1 + \frac{1}{\log x}\right|$$

Non è richesto lo studio della derivata seconda. Precisare se esistono punti di non derivabilità.

**Esercizio 3.** Dire per quali valori del numero reale $a$ l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{(x + \sqrt{x})^a}\,dx$$

è improrio e per quali valori di $a$ è' convergente. Calcolare inoltre l'integrale per $a = 1$.

## Verifica intermedia di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 18 dicembre 2013

**Esercizio 1.** Sia $z = -1 + \sqrt{3}i$. Si calcolino, modulo di $z$ e parte reale e immaginaria dell'inverso di $z$.

**Esercizio 2.**

(1) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che la funzione è continua in 0 (dare la definizione);
(2) Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f$ non è continua in 0 e $f^2$ è continua in 0;
(3) Si condideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Si dica se $f$ si può estendere con continuità in 0.

**Esercizio 3.** Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{t}.$$

**Esercizio 4.** Sia $a_n$ la successione definita per induzione da

$$a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n^2 + a_n + 1 \qquad \text{e} \qquad a_0 = 1.$$

Si dimostri che $0 < a_n < 2$ per ogni $n$. Si dimostri che esiste il limite della successione e se ne calcoli il valore.

## Soluzioni della verifica intermedia del 18 dicembre 2013

**Esercizio 1.**

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

Inoltre

$$\frac{1}{-1+\sqrt{3}\,i} = \frac{1}{-1+\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{-1-\sqrt{3}\,i} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{1+3} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{4}$$

Quindi la parte reale dell'inverso di $z$ è uguale a $\frac{-1}{4}$ e la parte immaginaria a $\frac{-\sqrt{3}}{4}$.

**Esercizio 2.** (1) $f$ è continua in zero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| \leqslant \delta$ allora $|f(x)-f(0)| \leqslant \varepsilon$.

(2) Sia $f(x)$ la funzione definita nel modo seguente

$$f(x) = 1 \text{ per } x \geqslant 0 \text{ e } f(x) = -1 \text{ per } x < 0.$$

Allora la funzione non è continua in zero perche limite destro e sinistro sono uguali rispettivamente a 1 e $-1$ e quindi esistono ma non coincidono. Mentre $f^2(x) = 1$ per ogni $x$ e quindi è continua.

(3) Ponendo $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \longrightarrow +\infty} e^{-y} = 0.$$

Quindi possiamo estendere la funzione con continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$.

**Esercizio 3.** Osserviamo che

$$\frac{\sin(e^t - 1)}{t} = \frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} \cdot \frac{e^t - 1}{t}.$$

Il fattore di destra tende a 1. Per calcolare il limite del fattore di sinistra osserviamo che si tratta di una funzione composta $f \circ g(t)$ con $g : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$ definita da $g(t) = e^t - 1$ e $F : \mathbb{R} \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(y) = \frac{\sin y}{y}$. Osserviamo inoltre che $\lim_{t \longrightarrow 0} g(t) = 0$ e $\lim_{y \longrightarrow 0} f(y) = 1$. Quindi abbiamo che

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{e^t - 1} = \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Quindi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{t} = 1.$$

**Esercizio 4.** *Prima soluzione* Dimostriamo per induzione che $a_n < a_{n+1}$ e che $0 < a_n < 2$.

*Passo basso* Per $n = 0$ la tesi è vera, infatti $a_0 = 1$ e $a_1 = 7/4$.

*Passo induttivo* Supponiamo adesso che $a_n < a_{n+1}$ e che $0 < a_n < 2$ e dimostriamo che $a_{n+1} < a_{n+2}$ e che $0 < a_{n+1} < 2$.

Poiché $a_{n+1} > a_n > 0$ abbiamo che la disuguaglianza $a_{n+1} > 0$ è verificata.

La disuguaglianza $2 > a_{n+1}$ è equivalente a $2 > -\frac{1}{4}a_n^2 + a_n + 1$ ovvero a

$$0 < a_n^2 - 4a_n + 4 = (a_n - 2)^2$$

che è verificata poiché $a_n \neq 2$.

Infine la disuguaglianza $a_{n+1} < a_{n+2}$ è equivalente a $a_{n+1} < -\frac{1}{4}a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1$ ovvero a $a_{n+1}^2 < 4$ ovvero a $-2 < a_{n+1} < 2$ che è verificata poiché abbiamo mostrato che $0 < a_{n+1} < 2$.

Quindi, essendo la successione monotona, avremo che esiste $\lim_{a_n} = L$ e inoltre avremo $0 \leqslant L \leqslant 2$. Per calcolare $L$ osserviamo che

$$\lim a_{n+1} = L \text{ e che } \lim -\tfrac{1}{4}a_n^2 + a_n + 1 = -\tfrac{1}{4}L^2 + L + 1.$$

Quindi otteniamo $L = -\frac{1}{4}L^2 + L + 1$ da cui $L^2 = 4$ da cui ricordandosi che $L \geqslant 0$ ricaviamo $L = 2$.

*Seconda soluzione* Altrimenti si poteva prima congetturare osservando i primi termini e poi dimostrare per induzione che $a_n = 2 - \frac{1}{2^{2^n - 2}}$. Il modo migliore per fare questo calcolo era vedere scrivere $a_n = 2 - b_n$ e vedere che $b_0 = 1$ e $b_{n+1} = b_n^2/4$.

Dimostrato questo le altre affermazioni erano ovvie.

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 14 gennaio 2014

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-2)^2}$. Studiare la funzione determinando:

(1) gli zeri e il segno di $f$;
(2) i punti nei quali $f$ è derivabile e i punti nei quali non lo è;
(3) gli intervalli in cui $f$ è crescente e quelli in cui è decrescente;
(4) l'estremo superiore, inferiore, e se esistono punti di massimo e minimo;
(5) il limite per $x$ che tende a più o meno infinito.

**Esercizio 2.** Dire per quali $x$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}) x^n.$$

**Esercizio 3.** Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0 = 0$ al secondo ordine per la funzione $\sqrt{1+x}$ con resto nella forma di Lagrange. Utilizzare il risultato per approssimare $\sqrt{16,12}$ dando una valutazione dellerrore. Sugg. $\sqrt{16,12} = 4\sqrt{1,\ldots}$.

**Esercizio 4.** Dare un esempio di successione limitata che non ha limite e un esempio di una successione che ha limite finito ma non è limitata. Oppure in entrambi i casi spiegare perché non è possibile trovare un tale esempio.

**Esercizio 5.** Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (\arctan(x) - \frac{1}{1+x^2}) dx.$$

## Soluzioni

**Soluzione esercizio 1.** (1)$f(x) > 0$ se e solo se $(x+2)^{\frac{2}{3}} > (x-2)^{\frac{2}{3}}$. Poiché la funzione $t \mapsto t^3$ è strettamente crescente questa disuguaglianza è equivalente a $(x+2)^2 > (x-2)^2$ ovvero, semplificando, a $x > 0$. Similmente ottentiamo $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f(x) < 0$ se e solo se $x < 0$.

(2)La funzione $t \mapsto t^{\frac{2}{3}}$ è derivabile per $t \neq 0$. Quindi per il teorema sulla derivata di una funzione composta otteniamo che per $x \neq \pm 2$ la funzione $f(x)$ è derivabile e

$$Df(x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}).$$

Per $x = \pm 2$ verifichiamo che la funzione non è derivabile usando la definizione. Studiamo il caso $x = -2$. La funzione è derivabile in $-2$ se e solo se lo è la funzione $(x+2)^{\frac{2}{3}}$. Calcoliamo il rapporto incrementale per questa funzione, otteniamo

$$\frac{(-2+h+2)^{\frac{2}{3}} - (-2+2)^{\frac{2}{3}}}{h} = h^{-\frac{1}{3}}$$

che non ha limite per $h$ che tende a 0, quindi $f$ non è derivabile in $-2$. Similmente non è derivabile in 2.

(3)Studiamo il segno della derivata. $Df(x) > 0$ se e solo se $(x+2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{3}}$ e elevando al cubo otteniamo $(x+2)^{-1} > (x-2)^{-1}$. Portando tutto al primo membro otteniamo $(x+2)^{-1} - (x-2)^{-1} > 0$ ovvero

$$\frac{-4}{x^2-4} > 0 \text{ ovvero } -2 < x < 2.$$

Similmente otteniamo che $Df(x) < 0$ per $x < -2$ e per $x > 2$. Quindi $f$ è crescente nell'intervallo $[-2, 2]$ e decrescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[2, \infty)$.

(4)Dallo studio precedente, e ricordando che $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$ ricaviamo che $-2$ è un punto di minimo assoluto e 2 è un punto di massimo assoluto. In particolare $-\sqrt[3]{16}$ è il minimo della funzione e $\sqrt[3]{16}$ è il massimo della funzione.

(5)Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{((x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}) \cdot ((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})}{(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{((x+2)^2 - (x-2)^2)}{(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{8x}{x^{\frac{4}{3}}((1+\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}} + (1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1-\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}})} \\ &= \frac{8}{x^{\frac{1}{3}}((1+\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}} + (1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1-\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}})} \end{aligned}$$

quindi $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

**Soluzione esercizio 2.** Sia $b_n = \frac{x^n}{n^2}$ osserviamo che $a_n/b_n$ tende a 1. Quindi la serie in questione converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Per $x$ positivo questa è una serie a termini posiviti e il rapporto $b_{n+1}/b_n$ tende a $x$. Quindi per $x > 1$ non converge e per $x < 1$ converge. Inoltre per $x = 1$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che sappiamo convergere. Il raggio di convergenza di particolare è uguale a 1. Rimane da studiare la serie per $x = -1$. Questa converge per il criterio di Leibniz.

**Soluzione esercizio 3.** Sia $f(x) = \sqrt{1+x}$. Abbiamo

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad D^2 f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad D^3 f(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}.$$

Quindi il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $x_0 = 0$ è $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ e abbiamo che per ogni $x \geqslant -1$ esiste $y$ compreso tra 0 e $x$ tale che

$$\sqrt{1+x} == 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+y)^{-\frac{5}{2}}x^3.$$

L'ultimo termine è decrescente in $y$ quindi per $x > 0$ (e quindi $x > y > 0$) abbiamo che

$$0 < (1+y)^{-\frac{5}{2}} < 1$$

da cui $0 < f(x) - P(x) < \frac{1}{16}x^3$. In particolare abbiamo

$$\sqrt{16,12} = 4\sqrt{1 + \frac{0,12}{16}} = 4\sqrt{1 + \frac{3}{400}}.$$

da cui

$$0 < \sqrt{16,12} - 4P(3/400) < \frac{3^3}{4^4\, 100^3} < 10^{-6}$$

e infine

$$4P(3/400) = 4 + \frac{3}{200} - \frac{9}{320000} = \frac{1280000 + 4800 - 9}{320000} = \frac{1284791}{320000}.$$

**Soluzione esercizio 4.** La successione $(-1)^n$ è limitata e non ha limite. Invece per quanto visto a lezione ogni successione che ha limite finito è limitata.

**Soluzione esercizio 5.** Integrando per parti ricaviamo

$$\int \arctan x = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

e operando il cambiamento di variabile $y = x^2$ otteniamo

$$\int x \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\, dy = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Quindi

$$\int (\arctan(x) - \frac{1}{1+x^2})dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \arctan x.$$

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 6 febbraio 2014

**Esercizio 1.** Sia $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 6x}$. Determinare

(1) dominio;
(2) punti in cui $f$ è derivabile;
(3) estremo superiore ed inferiore e se esistono punti di massimo e minimo locale e assoluto;
(4) limite per $x$ che tende a più infinito e limite per $x$ che tende a meno infinito.

**Esercizio 2.**

(1) Calcolare una primitiva della funzione

$$x \log(x+1).$$

(2) Calcolare, se esiste, il seguente integrale improprio

$$\int_{-1}^{0} x \log(x+1)\, dx.$$

**Esercizio 3.** Sia $a_n$ la successione definita da
$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$
Dimostrare che $a_n$ è crescente e calcolarne il limite.

**Esercizio 4.** Calcolare per quali $x$ converge la serie
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \log n}$$

**Esercizio 5.** Al variare del numero reale positivo $a$ si consideri la funzione $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_a(x) = x^3 - 3a^2 x + 1$. Si determini per quali valori di $a$ la funzione $f_a$ ha tre zeri.

## Soluzioni

**Soluzione esercizio 1.** a) La formula ha senso quando il termine sotto la radice è maggiore o uguale a zero. Quindi quando $4x^2 + 6x = 2x(2x+3) \geqslant 0$. Quindi il dominio è $D = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, \infty)$.

b) Per $x \in D$ e $x \neq 0, -\frac{3}{2}$ la funzione è sicuramente derivabile perché somma e composizione di funzioni derivabili. Per $x = 0, -\frac{3}{2}$ invece non possiamo applicare questo criterio perché la radice quadrata $\sqrt{y}$ non è derivabile in $y = 0$.

Proviamo a calcolare la derivata in questi due punti usando la definizione come limite del rapporto incrementale. Per $x = -\frac{3}{2}$ otteniamo
$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 6x} - 2\frac{3}{2} - 0}{x + \frac{3}{2}} = 2 + \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \frac{\sqrt{4x(x + \frac{3}{2})}}{x + \frac{3}{2}} = 2 + 2 \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} -\sqrt{\frac{x}{x + \frac{3}{2}}} = -\infty$$
Similmente per $x = 0$ otteniamo
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 6x} - 0 - 0}{x} = 2 + \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x(x + \frac{3}{2})}}{x} = 2 + 2 \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \sqrt{\frac{x + \frac{3}{2}}{x}} = +\infty.$$
Quindi nei punti $x = 0$ e $x = -\frac{3}{2}$ non è derivabile.

c) Calcoliamo la derivata della funzione in $D \setminus \{0, -\frac{3}{2}\}$. Otteniamo $f'(x) = 2 + \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+6x}}$. Studiamone il segno:
$$2 + \frac{4x + 3}{\sqrt{4x^2 + 6x}} > 0 \text{ se e solo se } 4x + 3 > -2\sqrt{4x^2 + 6x}$$
Se $x \geqslant 0$ è sicuramente verificata perché il termine a sinistra è positivo. Per $x \leqslant -\frac{3}{2}$ invece è negativo e quindi la disuguaglianza in questo intervallo è equivalente a $16x^2 + 24x + 9 < 4x^2 + 6x$ che semplificando diventa $4x^2 + 6x + 3 < 0$ che ha discriminante negativo e quindi non è mai verificata. Lo stesso studio mostra che la derivata non è mai nulla. Quindi la funzione è decrescente in $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ e crescente nell'intervallo $[0, \infty)$. Osserviamo inoltre che $f(-\frac{3}{2}) = -3$ e che $f(0) = 0$. In particolare $-3$ è il minimo assoluto, $-2$ è il punto di minimo e 0 è un punto diminimo locale. Non esistono punti di massimo locale e l'estremo superiore è $+\infty$. Infatti $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \geqslant \lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x = +\infty$.

d) Abbiamo già osservato che $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2 + 6x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + 6x}) \frac{2x - \sqrt{4x^2 + 6x}}{2x - \sqrt{4x^2 + 6x}} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 6x}{2x - \sqrt{4x^2 + 6x}}$$
$$- 6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{2x - \sqrt{4x^2 + 6x}} == -6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{4x^2+6x}}{x}} = -6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 + 6\frac{1}{x}}} = -\frac{3}{2}$$

**Soluzione esercizio 2.** a) Integrando per parti ottengo
$$\int x \log(x+1)\, dx = \frac{1}{2} x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1}\, dx$$
Ora divido $x^2$ per $x+1$ e ottengo $x^2 = (x+1)(x-1) + 1$. Sostituendo nella espressione trovata ottengo:
$$\frac{1}{2} x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2} x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) + \frac{1}{x+1}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \log(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \log(x+1) = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \log(x+1) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x.$$
Quindi la generica primitiva sarà uguale a $\frac{1}{2}(x^2 - 1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c$.

b) Si tratta di un integrale improprio perché per $x = -1$ la funzione diverge. Quindi la convergenza ed il calcolo dell'integrale è equivalente all'esistenza finita del limite

$$\lim_{r \longrightarrow -1^+} \int_r^0 x \log(x+1)\, dx = \lim_{r \longrightarrow -1^+} [\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x]_r^0 =$$

$$\lim_{r \longrightarrow -1^+} 0 + \frac{1}{2}(r-1)(r+1)\log(r+1) + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \lim_{r \longrightarrow -1^+}(r+1)\log(r+1)$$

infine ponendo $e^y = r+1$ otteniamo $\lim_{r \longrightarrow -1^+}(r+1)\log(r+1) = \lim_{y \longrightarrow -\infty} e^y y = 0$. Quindi l'integrale converge ed è uguale a $3/4$.

**Soluzione esercizio 3.** Osserviamo inanzitutto che tutti gli $a_n$ sono maggiori o uguali a 1. Infatti $a_0$ lo è, e se lo è $a_n$ lo è anche $a_{n+1}$ perché è la radice quadrata di un numero maggiore di 1.

Studiamo la condizione $a_{n+1} > a_n$. Dimostriamo questa affermazione per induzione. Per $n = 0$ è vera perché $a_0 = 1$ e $a_1 = \sqrt{2}$. Inoltre se per $n$ è vera allora $1 + a_{n+1} > 1 + a_n$ e quindi prendendo le radici quadrate $a_{n+2} > a_{n+1}$.

Osserviamo inoltre che la condizione $a_{n+1} > a_n$ è equivalente a $\sqrt{1+a_n} > a_n$ ovvero ad $a_n^2 - a_n - 1 < 0$ e questo implica che $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Quindi abbiamo dimostrato che la successione è crescente e limitata. Quindi ha limite finito che indichiamo con $L$. Passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ otteniamo $L = \sqrt{1+L}$ da cui $L^2 - L - 1 = 0$ ovvero $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ Osserviamo infine che essendo $a_n \geqslant 1$ dobbiamo avere anche che $L \geqslant 1$ quindi $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

**Soluzione esercizio 4.** Si tratta di una serie di potenze e indico con $R$ il suo raggio di convergenza. In particolare la serie convergerà in $(-R, R)$ e non convergerà fuori da $[-R, R]$. Analizziamo inanzitutto il caso di $x \geqslant 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Se applichiamo il criterio del rapporto troviamo che

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2 \log(n+1)}}{\frac{x^n}{n^2 \log n}} = \lim_{n \longrightarrow \infty} x \frac{n^2}{(n+1)^2} \frac{\log n}{\log(n+1)} = x$$

Infatti il fattore $x$ converge a $x$, il fattore $n^2/(n+1)^2$ converge a 1 e il fattore $\log(n)/\log(n+1)$ applicando il criterio di de l'Hopital diventa $(n+1)/n$ che pure converge a 1. Quindi la serie converge se $0 \leqslant x < 1$ e diverge per $x > 1$, in particolare $R = 1$. Rimangono da studiare i casi $x = 1$ e $x = -1$.

Per $x = 1$ a serie è $\sum_n \frac{1}{n^2 \log n}$ il cui termine generale è minore di $1/n^2$ e quindi converge.

Per $x = -1$ a serie è $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2 \log n}$. Osserviamo che se prendiamo la serie dei valori assoluti otteniamo la serie considerata per $x = 1$. Quindi per $x = -1$ converge assolutamente e quindi converge.

**Soluzione esercizio 5.** Studiamo la funzione $f_a$. Analizziamo prima il caso $a \geqslant 0$. Osserviamo che il limite per $x$ che tende a $-\infty$ è $-\infty$ e il limite per $x$ che tende a $+\infty$ è $+\infty$. Calcoliamo la derivata, otteniamo $f_a'(x) = 3(x^2 - a^2)$ che è negativa per $x \in (-a, a)$, zero in $x = \pm a$ e positiva altrimenti. Quindi $f_a$ è crescente in $(-\infty, -a]$, decrescente in $[-a, a]$ e crescente in $[a, \infty]$. In ognuno di questi intervalli può quindi avere al massimo uno zero. Osserviamo che $f_a(-a) = 4a^3 + 1 > 0$ quindi per il teorema degli zeri di Bolzano sicuramente ha uno zero nel primo intervallo. Similmente negli altri due intervalli ha uno zero se e solo se $f_a(a) < 0$ o se $f_a(a) = 0$. Se $f_a(a) = 0$ questo zero è $x = a$ e la funzione ha due zeri. Quindi la condizione per avere tre zeri è equivalente a $f_a(a) < 0$. Sviluppando otteniamo $-2a^3 + 1 < 0$ ovvero $a < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Se $a < 0$ osserviamo che $f_a = f_{-a}$ quindi otteniamo che ha tre zeri se e solo se $a > -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Quindi $f_a$ ha tre zeri distinti se e solo se $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < a < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

## III compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 31 marzo 2014

**Esercizio 1.** Sia $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 + 2i$ calcolare $z_1 \cdot z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

**Esercizio 2.**

a) Si scriva il polinomio di Taylor di $\cos(x)$ di ordine 4 nel punto $x_0 = 0$. Si enunci per la funzione $\cos(x)$, per l'ordine 4 e per il punto $x_0 = 0$ la formula di Taylor con il resto scritto nella forma di Lagrange;
b) Usando la formula di Taylor si trovi un approssimazione di $\cos(1)$ a meno di $\frac{1}{100}$.

**Esercizio 3.** Si determini il minimo della funzione $f(x) = x\log(x)$.

**Esercizio 4.** Si dimostri che per ogni $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$x > \frac{\tan(x)}{1 + (\tan(x))^2}.$$

**Esercizio 5.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x \log(x)}{2\log(x) - 1}.$$

Si determinino

a) dominio;
b) segno e zeri;
c) se si può estendere con continuità $f$ agli estremi del dominio di definizione;
d) in caso tale estensione esista si dica se $f$ è derivabile in tali punti;
e) punti di massimo e minimo e punti di massimo e minimo locali (in caso esistano);
f) per quali $c$ l'equazione $f(x) = c$ ha soluzione.

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 31 marzo 2014

**Esercizio 1.** Si dica per quali $x$ converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n}) x^n.$$

**Esercizio 2.** Si calcoli il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

**Esercizio 3.** Si determini il minimo della funzione $f(x) = x\log(x)$.

**Esercizio 4.** Si dimostri che per ogni $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$x > \frac{\tan(x)}{1 + (\tan(x))^2}.$$

**Esercizio 5.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x \log(x)}{2\log(x) - 1}.$$

Si determinino

a) dominio;
b) segno e zeri;
c) se si può estendere con continuità $f$ agli estremi del dominio di definizione;
d) in caso tale estensione esista si dica se $f$ è derivabile in tali punti;
e) punti di massimo e minimo e punti di massimo e minimo locali (in caso esistano);
f) Si determini, al variare di $c$, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ per $x$ nel dominio di $f$.

## Soluzioni III compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 31 marzo 2014

**Soluzioni esercizio 1.** Abbiamo

$$z_1 \cdot z_2 = 3 - 8 + (6+4)i = -5 + 10i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3+8+(-6+4)i}{1+4} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$$

**Soluzione esercizio 2.** a) per quanto detto a lezione tale polinomio è $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. La formula di Taylor in tale situazione dice che per ogni $x$ esiste $c$ compreso tra 0 e $x$ tale che

$$\cos(x) = P(x) + \frac{D^5(\cos)(c)}{120}x^5 = P(x) - \frac{\sin(c)}{120}x^5$$

infatti la derivata quinta della funzione $\cos(x)$ è uguale a $-\sin(x)$.

b) Per quanto ricordato nel punto *a*) esiste $c$ compreso tra 0 e 1 tale che $\cos(1) = P(1) - \frac{\sin(c)}{120}$. Poiché

$$0 < \frac{\sin(c)}{120} < \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$

abbiamo che $P(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ approssima $\cos(1)$ a meno di $1/100$.

**Soluzione esercizio 3.** La funzione è definita e derivabile per $x > 0$. La sua derivata è uguale a $1+\log(x)$, quindi è positiva per $x > e$ e negativa per $x < 1/e$. Quindi $1/e$ è un punto di minimo assoluto e il minimo di $f$ è uguale a $f(1/e) = -1/e$.

**Soluzione esercizio 4.** Si consideri la funzione $f(x) = x - \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$. Tale funzione è continua e derivabile in $[0, \pi/2)$. La sua derivata è uguale a

$$1 - \frac{\big(1+\tan^2(x)\big)^2 - 2\tan^2(x)\big(1+\tan^2(x)\big)}{\big(1+\tan^2(x)\big)^2} = 1 - \frac{1+\tan^2(x) - 2\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{2\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Quindi la derivata è positiva in $(0, \pi/2)$, e la funzione è crescente in $[0, \pi/2)$ da cui per $0 < x < \pi/2$ otteniamo

$$f(x) > f(0) = 0$$

che è equivalente alla disuguaglianza desiderata.

**Soluzione esercizio 5.** a) Il dominio di $f$ è determinato dalla condizione $x > 0$ (perché $x$ compare come argomento del logaritmo) e dalla condizione $2\log(x) - 1 \neq 0$ ovvero $x \neq \sqrt{e}$ (dato dal non annullarsi del denominatore).

b) Studiando il segno del numeratore troviamo che è positivo per $x > 1$, negativo per $x < 1$ e nullo per $x = 1$. Il segno del denominatore è invece positivo per $x > \sqrt{e}$ e negativo per $x < \sqrt{e}$. Quindi (per $x \in D$) abbiamo

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 1, \\ &f(x) > 0 \text{ se e solo se } x < 1 \text{ o } x > \sqrt{e} \\ &f(x) < 0 \text{ se e solo se } 1 < x < \sqrt{e}. \end{aligned}$$

c) Osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^+} f(x) = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^+} \frac{1}{2\log(x) - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Infine come abbiamo già verificato molte volte $\lim_{x \longrightarrow 0} x\log(x) = 0$ da cui $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$. Quindi la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$ e non si può estendere con continuità in $\sqrt{e}$.

Per il calcolo dell'estremo inferiore osserviamo anche che, similmente a quanto sopra, abbiamo che $\lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^-} f(x) = -\infty$.

d) Calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel punto in questione; otteniamo:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(x)}{2\log(x) - 1} = \lim_{y \longrightarrow -\infty} \frac{y}{2y - 1} = \frac{1}{2}.$$

e quindi la funzione è derivabile in 0.

e) Osserviamo inanzitutto che sicuramente $f$ non ha massimi o minimi assoluti perché ha estremo superiore e inferiori uguali a $+\infty$ e $-\infty$.

Per studiare i massimi e minimi locali calcoliamo la derivata di $f$: otteniamo

$$f'(x) = \frac{\big(1+\log(x)\big) \cdot \big(2\log(x) - 1\big) - 2\log(x)}{\big(2\log(x) - 1\big)^2} = \frac{2\log^2(x) - \log(x) - 1}{\big(2\log(x) - 1\big)^2}.$$

Per studiarne il segno dobbiamo determinare il segno del numeratore. Studiamo intanto il segno di $2y^2 - y - 1$ e otteniamo che è maggiore di zero per $y < -\frac{1}{2}$ o $y > 1$ e minore di zero per $-\frac{1}{2} < y < 1$.

Ponendo $y = \log(x)$ otteniamo che il numeratore è positivo per $x < 1/\sqrt{e} = x_1$ o $x > e$ e negativo per $x_1 < x < e$.

Quindi $f$ è crescente nell'intervallo $(0, x_1]$ e nell'intervallo $[e, +\infty)$ e decrescente nell'intervallo $[x_1, \sqrt{e})$ e nell'intervallo $(\sqrt{e}, e]$. (Si noti che non è decrescente nell'intervallo $[x_1, e]$!!)

Quindi $f$ ha un minimo locale in $e$ e vale $f(e) = e$ e ha un massimo locale in $x_1$ e vale $f(x_1) = 1/(4\sqrt{e})$.

f) per il teorema di Bolzano e lo studio degli intervalli di monotonia abbiamo che:

- per $x \in (0, x_1]$ la funzione $f$ assume tutti i valori in $(0, 1/(4\sqrt{e}]$ una sola volta;
- per $x \in (x_1, \sqrt{e})$ assume tutti i valori in $(-\infty, 1/(4\sqrt{e}))$ una sola volta;
- per $x \in (\sqrt{e}, e]$ assume tutti i valori in $[e, \infty)$ una sola volta;
- per $x \in (e, \infty)$ assume tutti i valori in $(e, \infty)$ una sola volta.

Quindi

- per $c \leqslant 0$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente una soluzione;
- per $0 < c < 1/(4\sqrt{e})$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni;
- per $c = 1/(4\sqrt{e})$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente una soluzione;
- per $1/(4\sqrt{e}) < c < e$ l'equazione $f(x) = c$ non ha soluzioni;
- per $c = e$ l'equazione $f(x) = e$ ha esattamente una soluzione;
- per $e < c$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni.

## IV compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 28 maggio 2014 ore 16

**Esercizio 1.** Sia $z = 3 + 5i$, calcolare $z^2$ e $|z|$.

**Esercizio 2.** Si consideri la serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}).$$

Dire se converge.

**Esercizio 3.** Calcolare una primitiva della funzione

$$\frac{x}{x + 2 + 2\sqrt{x+1}}.$$

**Esercizio 4.**

(1) Sia $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Cosa vuol dire che l'integrale $\int_a^b f(t)dt$ è convergente?

(2) Sia $F : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\log t}{t-1}\, dt.$$

Si dica se $F$ si può estendere in modo continuo in 0 ed in 1.

**Esercizio 5.** Sia $F$ la funzione definita da

$$F(x) = \int_0^x (e^t - e) \arctan(t)\, dt.$$

Mostrare che $F$ ha esattamente due zeri.

## Spunti per la soluzione

**Esercizio 1.** $z^2 = -16 + 30i$, $|z| = \sqrt{34}$.

**Esercizio 2.** Per confronto asintotico con $1/n^2$ si ottiene che converge.

**Esercizio 3.** Mediante la sostitizione $y = \sqrt{x+1}$ si ottiene

$$\int \frac{x}{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2(y^2-1)y}{y^2+1+2y} dy = 2 \int \frac{(y-1)(y+1)y}{(y+1)^2} dy = 2 \int \frac{(y-1)y}{y+1} dy =$$

Infine osserviamo che $(y-1)y = y^2 - y = (y+1)(y-2) + 2$ da cui

$$2 \int \frac{(y-1)y}{y+1} dy = 2 \int y - 2dy + 4 \int \frac{1}{y+1} dy = y^2 - 4y + \log(y+1) = x - 4\sqrt{1+x} + \log(1 + \sqrt{1+x}).$$

**Esercizio 4.** (1) Vuol dire che esiste finito il seguente limite:

$$\lim_{c\longrightarrow b^-}\int_a^c f(t)\,dt.$$

(2) Si deve stabilire se esistono finiti i limiti

$$\lim_{x\longrightarrow 1} F(x) \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} F(0).$$

Ovvero se gli integrali $\int_{1/2}^1 \frac{\log t}{t-1}dt$ e $\int_0^{1/2} \frac{\log t}{t-1}dt$ convergono.

Nel primo caso osserviamo che $\lim_{t\longrightarrow 1}\frac{\log t}{t-1} = 1$ (per esempio con de l'Hopital o ponendo $s = t-1$), quindi si tratta di un integrale di una funzione continua definita in $[1/2, 1]$. E quindi l'integrale in particolare converge.

Nel secondo caso procediamo per confronto asintotico con $x^{-1/2}$ e osserviamo che

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\log x}{x-1}}{x^{-1/2}} = \lim \frac{-\log x}{x^{-1/2}}$$

che e' della forma $\infty/\infty$e applicando de l'Hopital otteniamo $\lim_{x\longrightarrow 0} 2x^{1/2} = 0$. Quindi, poiché l'integrale $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ è convergente anche l'integrale $\int_0^{1/2}\frac{\log t}{t-1}dt$ è convergente e quindi $F$ si può estendere con continuità anche in 0.

**Esercizio 5.** si noti che la derivata di $F$ è la funzione $(e^x - e)\arctan x$ e quindi è positiva per $x < 0$ e per $x > 1$. Quindi F è crescente in $(-\infty, 0]$ e in $[1, \infty)$. In particolare 0 è un punto di massimo locale nel quale la funzione vale zero. Inoltre poiché $(e^x - e)\arctan x > 1$ per $x$ grande otteniamo che $\lim_{x\longrightarrow\infty} F(x) = \infty$ e quindi $F$ ha un secondo zero nell'intervallo $(1, \infty)$.

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 5 giugno 2014, ore 15:00, aule A,B,C

**Esercizio.** Si calcoli una primitiva della funzione $e^{\sqrt{x}}$.

**Esercizio.** Sia $z = 5 - 12i$. Determinare tutti i numeri complessi $w$ tali che $w^2 = z$.

**Esercizio.** Si dica se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\sin(1/n)}$$

è convergente.

**Esercizio.**

(1) Si determinino dominio, zeri, segno, punti di massimo e minimo locali della funzione

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}.$$

(2) Si determini inoltre l'immagine di $f$.

**Esercizio.** Siano $F$ e $G$ le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_0^x \sin(x+1)(e^x - 1)\,dx \qquad G(x) = \int_0^x x\,dx$$

Si calcoli

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{F(x)}{G(x)}.$$

## Soluzioni

**Soluzione primo esercizio del compito.** Operiamo il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ ovvero $2ydy = dx$. Sostituendo otteniamo

$$2\int ye^y dy = 2ye^2 - 2\int e^y dy = (2y-2)e^y$$

Quindi $f(x) = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ è una primitiva di $e^{\sqrt{x}}$.

**Soluzione secondo esercizio del compito.** Sia $w = a + ib$ imponendo $w^2 = 5 - 12i$ otteniamo

$$a^2 - b^2 = 5 \qquad 2ab = -12$$

Ricavando la b dalla seconda equazione e sostituendo otteniamo

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

da cui $a^2 = 9$ o $a^2 = -4$. Essendo $a^2$ positivo la seconda possibilità non si verifica, quindi $a^2 = 9$ ovvero $a = 3$ e $b = -2$ o $a = -3$ e $b = 2$.

**Soluzione terzo esercizio del compito.** Confrontiamo la serie con la serie armonica. Abbiamo

$$\lim \frac{1/n}{\frac{1}{n^2 \sin(1/n)}} = \lim \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$$

Quindi la serie si comporta come la serie $\sum 1/n$ che sappiamo divergere.

**Soluzione quarto esercizio del compito.** Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Segno e zeri: $f(x) > 0$ se e solo se $x + 1 > 0$ perché il fattore con l'esponenziale è sempre positivo. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x > -1$.

Similmente $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$ e $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$.

Per determinare massimi e minimi locali calcoliamo la derivata di $f$, otteniamo

$$Df(x) = e^{1/x}(-\frac{x+1}{x^2} + 1).$$

Quindi la derivata è positiva se e solo se $x^2 - x - 1 > 0$ ovvero per $x < a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o per $x > b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e negativa all'interno di questi due valori. Ne deduciamo che la funzione è crescente nell'intervallo $(-\infty, a]$ e nell'intervallo $[b, \infty)$, e è decrescente negli intervalli $[a, 0)$ e $(0, b]$. Quindi $a$ è un punto di massimo locale e $b$ di minimo locale.

Osserviamo infine che abbiamo che $\lim_{x\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ infatti il termine con l'esponenziale tende a 1 in questi casi.

Quindi per il teorema di Bolzano l'immagine di $f$ è l'unione degli intervalli $(-\infty, f(a)]$ e $[f(b), \infty)$.

Verifichiamo infine che si tratta di due intervalli disgiunti ovvero che $f(a) < f(b)$. Abbiamo

$$f(a) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}} \qquad f(b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$$

Quindi $f(a) < f(b)$ è equivalente a

$$\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} < e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}}$$

ovvero a

$$7 - 3\sqrt{5} < e^{\sqrt{5}}$$

Questa disuguaglianza è vera infatti il termine sulla sinistra è minore di 1 (per via di $\sqrt{5} > 2$) e quello sulla destra è maggiore di 1 (per via di $\sqrt{5} > 0$).

**Soluzione quinto esercizio del compito.** Osserviamo che $F$ e $G$ sono due funzioni continue e derivabile con $F(0) = G(0) = 0$ sono quindi nelle condizioni di provare ad applicare il criterio di de l'Hopital. Abbiamo $DF(x) = \sin(x + 1)(e^x - 1)$ e $DG(x) = x$ e quindi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \sin(x + 1)\frac{e^x - 1}{x} = \sin 1.$$

## Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 7 luglio 2014, ore 9:00, aule A,B,C

**Esercizio.** Si determino le soluzioni complesse dell'equazione: $z^3 = 8$.

**Esercizio.** Si calcoli una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 1}$$

**Esercizio.** Si determinino estremo superiore ed inferiore e punti di massimo e minimo locale della funzione

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 3}$$

**Esercizio.** Si dica se il seguente integrale improprio converge:
$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} dx$$

**Esercizio.** Si dica se la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n\sqrt{n}}$$
è convergente.

Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 3 settembre 2014,

**Esercizio.** Si stabilisca se il seguente integrale improprio è convergente
$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)}\, dx.$$

**Esercizio.** Si determinino i numeri complessi $z$ tali che $z^2 = -8+6i$.

**Esercizio.** Sia $F(x) = \int_0^x (t^2-1)(e^{t^2}-1)dt$. Determinare il numero degli zeri della funzione $F$.

**Esercizio.** Si scriva il polinomio di Taylor di ordine 3 relativa al punto $x_0 = 0$ della funzione $\sin(x)$. Si scriva la relativa formula di Taylor con resto di Lagrange. Dare una stima di $\arcsin(1/2)$ a meno di $1/100$ utilizzando tale formula.

**Esercizio.** Si consideri la seguente serie dipendente dal parametro $x \in (-1, \infty)$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \log(1+x^n).$$

(1) per quali $x \geqslant 0$ la serie converge?
(2) per quali $x \in (-1, 0)$ la serie converge?