Verifica intermedia di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 6 novembre 2013

Esercizio 1.

(1) Calcolare il prodotto dei numeri complessi $1+3i$ e $1-7i$;
(2) calcolare modulo e coniugato del numero complesso $3+4i$;
(3) calcolare la parte reale e la parte immaginaria dell'inverso di $1+2i$.
(4) derminare tutti i numeri complessi z tali che $z^3=\overline{z}$.

Esercizio 2.

(1) Dare la definizione di estremo superiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia non vuoto e che sia limitato superiormente;
(2) fare un esempio di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che ha estremo superiore uguale ad 1 e che non ha massimo.

Esercizio 3. Dimostrare che $2^n+3^n\leqslant 4^n$ per ogni n intero e $n\geqslant 2$.

Soluzioni della verifica intermedia del 6 novembre 2013

Esercizio 1.

$$\begin{aligned}(1+3i)\cdot(1-7i)&=1+21+3i-7i=22-4i.\\ |3+4i|&=\sqrt{9+16}=5\\ \overline{3+4i}&=3-4i\\ \frac{1}{1+2i}&=\frac{1}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i}=\frac{1-2i}{5}.\end{aligned}$$

quindi la parte reale e la parte immaginaria dell'inverso di $1+2i$ sono uguali a $1/5$ e a $-2/5$.

Per studiare l'equazione $z^3=\overline{z}$ osserviamo inanzitutto che $z=0$ è una soluzione. Per $z\neq 0$ scriviamo z nella forma $z=Re^{i\theta}$ con $R\in\mathbb{R}_+$ e $\theta\in\mathbb{R}$. Abbiamo $z^3=R^3e^{3i\theta}$ e $\overline{z}=R^{-i\theta}$. L'equazione iniziale è quindi equivalente al sistema

$$R^3=R \quad \text{ e } 3\theta=-\theta+2k\pi$$

con k intero. Da questo sistema, ricordando che stiamo assumendo $R>0$ ricaviamo $R=1$ e

$$\theta=\frac{2\pi}{4}k$$

per k intero. Per ottenere tutti i possibili valori distinti di z basta scegliere $k=0,1,2,3$. Abbiamo quindi che le soluzioni sono

$$z=0 \qquad z=1 \qquad z=e^{\frac{\pi i}{2}}=i \qquad z=e^{\pi i}=-1 \qquad z=e^{\frac{3\pi i}{2}}=-i.$$

Esercizio 2. 1) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia non vuoto e limitato superiormente. Sia B l'insieme dei maggioranti di A ovvero l'insieme degli elementi $x\in\mathbb{R}$ tali che $x\geqslant a$ per ogni $a\in A$. Allora l'insieme B ha minimo e l'estremo superiore di A è definito come il minimo dell'insieme B.

2) Sia $A=[0,1)$. Allora l'estremo superiore è uguale a 1 e A non ha massimo.

Esercizio 3. Passo base: per $n=2$ l'affermazione è vera. Infatti $2^2+3^2=13<4^2$.

Passo induttivo. Supponiamo adesso che l'affermazione sia vera per un numero $n\geqslant 2$ e dimostriamola per $n+1$. Abbiamo

$$2^{n+1}+3^{n+1}=2\cdot 2^n+3\cdot 3^n\leqslant 4\cdot 2^n+4\cdot 3^n=4\cdot(2^n+3^n)\leqslant 4\cdot 4^n=4^{n+1}.$$

Compito di Analisi Matematica, appello staordinario, 6 novembre 2013

Esercizio 1. Sia x_n la successione definita per ricorrenza da

$$x_1=\frac{8}{5}, \qquad x_{n+1}=\frac{8\,x_n}{3\,x_n+2}.$$

- Provare per induzione che $x_n=2\frac{4^n}{4^n+1}$;
- Calcolare (se esistono) massimo e minimo, estremo superiore ed inferiore;
- Calcolare il limite della successione.

Esercizio 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{x}\left|1 + \frac{1}{\log x}\right|$$

Non è richesto lo studio della derivata seconda. Precisare se esistono punti di non derivabilità.

Esercizio 3. Dire per quali valori del numero reale a l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1}{(x+\sqrt{x})^a}\, dx$$

è improrio e per quali valori di a è' convergente. Calcolare inoltre l'integrale per $a = 1$.

Verifica intermedia di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 18 dicembre 2013

Esercizio 1. Sia $z = -1 + \sqrt{3}i$. Si calcolino, modulo di z e parte reale e immaginaria dell'inverso di z.

Esercizio 2.

(1) Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Cosa vuol dire che la funzione è continua in 0 (dare la definizione);
(2) Fare un esempio di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che f non è continua in 0 e f^2 è continua in 0;
(3) Si condideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Si dica se f si può estendere con continuità in 0.

Esercizio 3. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{\sin(e^t - 1)}{t}.$$

Esercizio 4. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$a_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n^2 + a_n + 1 \quad \text{e} \quad a_0 = 1.$$

Si dimostri che $0 < a_n < 2$ per ogni n. Si dimostri che esiste il limite della successione e se ne calcoli il valore.

Soluzioni della verifica intermedia del 18 dicembre 2013

Esercizio 1.

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

Inoltre

$$\frac{1}{-1+\sqrt{3}\,i} = \frac{1}{-1+\sqrt{3}\,i} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{-1-\sqrt{3}\,i} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{1+3} = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{4}$$

Quindi la parte reale dell'inverso di z è uguale a $\frac{-1}{4}$ e la parte immaginaria a $\frac{-\sqrt{3}}{4}$.

Esercizio 2. (1) f è continua in zero se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x| \leqslant \delta$ allora $|f(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$.

(2) Sia $f(x)$ la funzione definita nel modo seguente

$$f(x) = 1 \text{ per } x \geqslant 0 \text{ e } f(x) = -1 \text{ per } x < 0.$$

Allora la funzione non è continua in zero perche limite destro e sinistro sono uguali rispettivamente a 1 e -1 e quindi esistono ma non coincidono. Mentre $f^2(x) = 1$ per ogni x e quindi è continua.

(3) Ponendo $y = \frac{1}{x}$ osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \longrightarrow +\infty} e^{-y} = 0.$$

Quindi possiamo estendere la funzione con continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$.

Esercizio 3. Osserviamo che
$$\frac{\sin(e^t-1)}{t}=\frac{\sin(e^t-1)}{e^t-1}\cdot\frac{e^t-1}{t}.$$
Il fattore di destra tende a 1. Per calcolare il limite del fattore di sinistra osserviamo che si tratta di una funzione composta $f\circ g(t)$ con $g:\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$ definita da $g(t)=e^t-1$ e $F:\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(y)=\frac{\sin y}{y}$. Osserviamo inoltre che $\lim_{t\longrightarrow 0} g(t)=0$ e $\lim_{y\longrightarrow 0} f(y)=1$. Quindi abbiamo che
$$\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\sin(e^t-1)}{e^t-1}=\lim_{y\longrightarrow 0}\frac{\sin y}{y}=1.$$
Quindi
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(e^t-1)}{t}=1.$$

Esercizio 4. *Prima soluzione* Dimostriamo per induzione che $a_n<a_{n+1}$ e che $0<a_n<2$.

Passo basso Per $n=0$ la tesi è vera, infatti $a_0=1$ e $a_1=7/4$.

Passo induttivo Supponiamo adesso che $a_n<a_{n+1}$ e che $0<a_n<2$ e dimostriamo che $a_{n+1}<a_{n+2}$ e che $0<a_{n+1}<2$.

Poiché $a_{n+1}>a_n>0$ abbiamo che la disuguaglianza $a_{n+1}>0$ è verificata.

La disuguaglianza $2>a_{n+1}$ è equivalente a $2>-\frac{1}{4}a_n^2+a_n+1$ ovvero a
$$0<a_n^2-4a_n+4=(a_n-2)^2$$
che è verificata poiché $a_n\neq 2$.

Infine la disuguaglianza $a_{n+1}<a_{n+2}$ è equivalente a $a_{n+1}<-\frac{1}{4}a_{n+1}^2+a_{n+1}+1$ ovvero a $a_{n+1}^2<4$ ovvero a $-2<a_{n+1}<2$ che è verificata poiché abbiamo mostrato che $0<a_{n+1}<2$.

Quindi, essendo la successione monotona, avremo che esiste $\lim_{a_n}=L$ e inoltre avremo $0\leqslant L\leqslant 2$. Per calcolare L osserviamo che
$$\lim a_{n+1}=L\ \text{ e che }\ \lim -\tfrac{1}{4}a_n^2+a_n+1=-\tfrac{1}{4}L^2+L+1.$$
Quindi otteniamo $L=-\frac{1}{4}L^2+L+1$ da cui $L^2=4$ da cui ricordandosi che $L\geqslant 0$ ricaviamo $L=2$.

Seconda soluzione Altrimenti si poteva prima congetturare osservando i primi termini e poi dimostrare per induzione che $a_n=2-\frac{1}{2^{2^n-2}}$. Il modo migliore per fare questo calcolo era vedere scrivere $a_n=2-b_n$ e vedere che $b_0=1$ e $b_{n+1}=b_n^2/4$.

Dimostrato questo le altre affermazioni erano ovvie.

Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 14 gennaio 2014

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

Esercizio 1. Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$. Studiare la funzione determinando:

(1) gli zeri e il segno di f;
(2) i punti nei quali f è derivabile e i punti nei quali non lo è;
(3) gli intervalli in cui f è crescente e quelli in cui è decrescente;
(4) l'estremo superiore, inferiore, e se esistono punti di massimo e minimo;
(5) il limite per x che tende a più o meno infinito.

Esercizio 2. Dire per quali x la seguente serie è convergente
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{1}{n})x^n.$$

Esercizio 3. Scrivere la formula di Taylor di punto iniziale $x_0=0$ al secondo ordine per la funzione $\sqrt{1+x}$ con resto nella forma di Lagrange. Utilizzare il risultato per approssimare $\sqrt{16,12}$ dando una valutazione dellerrore. Sugg. $\sqrt{16,12}=4\sqrt{1,\dots}$.

Esercizio 4. Dare un esempio di successione limitata che non ha limite e un esempio di una successione che ha limite finito ma non è limitata. Oppure in entrambi i casi spiegare perché non è possibile trovare un tale esempio.

Esercizio 5. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int (\arctan(x) - \frac{1}{1+x^2})dx.$$

Soluzioni

Soluzione esercizio 1. (1)$f(x) > 0$ se e solo se $(x+2)^{\frac{2}{3}} > (x-2)^{\frac{2}{3}}$. Poiché la funzione $t \mapsto t^3$ è strettamente crescente questa disuguaglianza è equivalente a $(x+2)^2 > (x-2)^2$ ovvero, semplificando, a $x > 0$. Similmente ottentiamo $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$ e $f(x) < 0$ se e solo se $x < 0$.

(2)La funzione $t \mapsto t^{\frac{2}{3}}$ è derivabile per $t \neq 0$. Quindi per il teorema sulla derivata di una funzione composta otteniamo che per $x \neq \pm 2$ la funzione $f(x)$ è derivabile e

$$Df(x) = \frac{2}{3}(\frac{1}{\sqrt[3]{x+2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}).$$

Per $x = \pm 2$ verifichiamo che la funzione non è derivabile usando la definizione. Studiamo il caso $x = -2$. La funzione è derivabile in -2 se e solo se lo è la funzione $(x+2)^{\frac{2}{3}}$. Calcoliamo il rapporto incrementale per questa funzione, otteniamo

$$\frac{(-2+h+2)^{\frac{2}{3}} - (-2+2)^{\frac{2}{3}}}{h} = h^{-\frac{1}{3}}$$

che non ha limite per h che tende a 0, quindi f non è derivabile in -2. Similmente non è derivabile in 2.

(3)Studiamo il segno della derivata. $Df(x) > 0$ se e solo se $(x+2)^{-\frac{1}{3}} > (x-2)^{-\frac{1}{3}}$ e elevando al cubo otteniamo $(x+2)^{-1} > (x-2)^{-1}$. Portando tutto al primo membro otteniamo $(x+2)^{-1} - (x-2)^{-1} > 0$ ovvero

$$\frac{-4}{x^2-4} > 0 \text{ ovvero } -2 < x < 2.$$

Similmente otteniamo che $Df(x) < 0$ per $x < -2$ e per $x > 2$. Quindi f è crescente nell'intervallo $[-2, 2]$ e decrescente negli intervalli $(-\infty, -2]$ e $[2, \infty)$.

(4)Dallo studio precedente, e ricordando che $f(x) < 0$ per $x < 0$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$ ricaviamo che -2 è un punto di minimo assoluto e 2 è un punto di massimo assoluto. In particolare $-\sqrt[3]{16}$ è il minimo della funzione e $\sqrt[3]{16}$ è il massimo della funzione.

(5)Osserviamo che

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{((x+2)^{\frac{2}{3}} - (x-2)^{\frac{2}{3}}) \cdot ((x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}})}{(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{((x+2)^2 - (x-2)^2)}{(x+2)^{\frac{4}{3}} + (x+2)^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}} + (x-2)^{\frac{4}{3}}} \\ &= \frac{8x}{x^{\frac{4}{3}}((1+\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}} + (1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1-\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}})} \\ &= \frac{8}{x^{\frac{1}{3}}((1+\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}} + (1+\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{2}{x})^{\frac{2}{3}} + (1-\frac{2}{x})^{\frac{4}{3}})} \end{aligned}$$

quindi $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Soluzione esercizio 2. Sia $b_n = \frac{x^n}{n^2}$ osserviamo che a_n/b_n tende a 1. Quindi la serie in questione converge se e solo se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Per x positivo questa è una serie a termini posiviti e il rapporto b_{n+1}/b_n tende a x. Quindi per $x > 1$ non converge e per $x < 1$ converge. Inoltre per $x = 1$ otteniamo la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che sappiamo convergere. Il raggio di convergenza di particolare è uguale a 1. Rimane da studiare la serie per $x = -1$. Questa converge per il criterio di Leibniz.

Soluzione esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{1+x}$. Abbiamo

$$Df(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad D^2f(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad D^3f(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}.$$

Quindi il polinomio di Taylor del secondo ordine di punto iniziale $x_0 = 0$ è $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ e abbiamo che per ogni $x \geqslant -1$ esiste y compreso tra 0 e x tale che

$$\sqrt{1+x} == 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(1+y)^{-\frac{5}{2}}x^3.$$

L'ultimo termine è decrescente in y quindi per $x > 0$ (e quindi $x > y > 0$) abbiamo che

$$0 < (1+y)^{-\frac{5}{2}} < 1$$

da cui $0 < f(x) - P(x) < \frac{1}{16}x^3$. In particolare abbiamo

$$\sqrt{16,12} = 4\sqrt{1 + \frac{0,12}{16}} = 4\sqrt{1 + \frac{3}{400}}.$$

da cui

$$0 < \sqrt{16,12} - 4P(3/400) < \frac{3^3}{4^4\, 100^3} < 10^{-6}$$

e infine

$$4P(3/400) = 4 + \frac{3}{200} - \frac{9}{320000} = \frac{1280000 + 4800 - 9}{320000} = \frac{1284791}{320000}.$$

Soluzione esercizio 4. La successione $(-1)^n$ è limitata e non ha limite. Invece per quanto visto a lezione ogni successione che ha limite finito è limitata.

Soluzione esercizio 5. Integrando per parti ricaviamo

$$\int \arctan x = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

e operando il cambiamento di variabile $y = x^2$ otteniamo

$$\int x \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+y}\, dy = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Quindi

$$\int (\arctan(x) - \frac{1}{1+x^2}) dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \arctan x.$$

Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 6 febbraio 2014

Esercizio 1. Sia $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + 6x}$. Determinare

(1) dominio;
(2) punti in cui f è derivabile;
(3) estremo superiore ed inferiore e se esistono punti di massimo e minimo locale e assoluto;
(4) limite per x che tende a più infinito e limite per x che tende a meno infinito.

Esercizio 2.

(1) Calcolare una primitiva della funzione
$$x \log(x+1).$$
(2) Calcolare, se esiste, il seguente integrale improprio
$$\int_{-1}^{0} x \log(x+1)\, dx.$$

Esercizio 3. Sia a_n la successione definita da

$$a_0 = 1 \qquad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}.$$

Dimostrare che a_n è crescente e calcolarne il limite.

Esercizio 4. Calcolare per quali x converge la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \log n}$$

Esercizio 5. Al variare del numero reale positivo a si consideri la funzione $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_a(x) = x^3 - 3a^2x + 1$. Si determini per quali valori di a la funzione f_a ha tre zeri.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1. a) La formula ha senso quando il termine sotto la radice è maggiore o uguale a zero. Quindi quando $4x^2 + 6x = 2x(2x+3) \geqslant 0$. Quindi il dominio è $D = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, \infty)$.

b) Per $x \in D$ e $x \neq 0, -\frac{3}{2}$ la funzione è sicuramente derivabile perché somma e composizione di funzioni derivabili. Per $x = 0, -\frac{3}{2}$ invece non possiamo applicare questo criterio perché la radice quadrata $\sqrt{y}$ non è derivabile in $y = 0$.

Proviamo a calcolare la derivata in questi due punti usando la definizione come limite del rapporto incrementale. Per $x = -\frac{3}{2}$ otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \frac{2x + \sqrt{4x^2+6x} - 2\frac{3}{2} - 0}{x + \frac{3}{2}} = 2 + \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \frac{\sqrt{4x(x+\frac{3}{2})}}{x+\frac{3}{2}} = 2 + 2 \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} -\sqrt{\frac{x}{x+\frac{3}{2}}} = -\infty$$

Similmente per $x = 0$ otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{2x + \sqrt{4x^2+6x} - 0 - 0}{x} = 2 + \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x(x+\frac{3}{2})}}{x} = 2 + 2 \lim_{x \longrightarrow -\frac{3}{2}^-} \sqrt{\frac{x+\frac{3}{2}}{x}} = +\infty.$$

Quindi nei punti $x = 0$ e $x = -\frac{3}{2}$ non è derivabile.

c) Calcoliamo la derivata della funzione in $D \smallsetminus \{0, -\frac{3}{2}\}$. Otteniamo $f'(x) = 2 + \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+6x}}$. Studiamone il segno:

$$2 + \frac{4x+3}{\sqrt{4x^2+6x}} > 0 \text{ se e solo se } 4x + 3 > -2\sqrt{4x^2+6x}$$

Se $x \geqslant 0$ è sicuramente verificata perché il termine a sinistra è positivo. Per $x \leqslant -\frac{3}{2}$ invece è negativo e quindi la disuguaglianza in questo intervallo è equivalente a $16x^2 + 24x + 9 < 4x^2 + 6x$ che semplificando diventa $4x^2 + 6x + 3 < 0$ che ha discriminante negativo e quindi non è mai verificata. Lo stesso studio mostra che la derivata non è mai nulla. Quindi la funzione è decrescente in $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ e crescente nell'intervallo $[0, \infty)$. Osserviamo inoltre che $f(-\frac{3}{2}) = -3$ e che $f(0) = 0$. In particolare -3 è il minimo assoluto, -2 è il punto di minimo e 0 è un punto diminimo locale. Non esistono punti di massimo locale e l'estremo superiore è $+\infty$. Infatti $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \geqslant \lim_{x \longrightarrow +\infty} 2x = +\infty$.

d) Abbiamo già osservato che $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} 2x + \sqrt{4x^2+6x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+6x}) \frac{2x - \sqrt{4x^2+6x}}{2x - \sqrt{4x^2+6x}} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - 6x}{2x - \sqrt{4x^2+6x}}$$
$$-6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x}{2x - \sqrt{4x^2+6x}} == -6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{2 - \frac{\sqrt{4x^2+6x}}{x}} = -6 \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{2 + \sqrt{4 + 6\frac{1}{x}}} = -\frac{3}{2}$$

Soluzione esercizio 2. a) Integrando per parti ottengo

$$\int x \log(x+1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x+1}\, dx$$

Ora divido x^2 per $x+1$ e ottengo $x^2 = (x+1)(x-1) + 1$. Sostituendo nella espressione trovata ottengo:

$$\frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{(x+1)(x-1)+1}{x+1}\, dx = \frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{2} \int (x-1) + \frac{1}{x+1}\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2 \log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\log(x+1) = \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Quindi la generica primitiva sarà uguale a $\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + c$.

b) Si tratta di un integrale improprio perché per $x = -1$ la funzione diverge. Quindi la convergenza ed il calcolo dell'integrale è equivalente all'esistenza finita del limite

$$\lim_{r \longrightarrow -1^+} \int_r^0 x \log(x+1)\, dx = \lim_{r \longrightarrow -1^+} [\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x]_r^0 =$$
$$\lim_{r \longrightarrow -1^+} 0 + \frac{1}{2}(r-1)(r+1)\log(r+1) + \frac{1}{4}r^2 - \frac{1}{2}r = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \lim_{r \longrightarrow -1^+} (r+1)\log(r+1)$$

infine ponendo $e^y = r+1$ otteniamo $\lim_{r\longrightarrow -1^+}(r+1)\log(r+1) = \lim_{y\longrightarrow -\infty} e^y y = 0$. Quindi l'integrale converge ed è uguale a $3/4$.

Soluzione esercizio 3. Osserviamo inanzitutto che tutti gli a_n sono maggiori o uguali a 1. Infatti a_0 lo è, e se lo è a_n lo è anche a_{n+1} perché è la radice quadrata di un numero maggiore di 1.

Studiamo la condizione $a_{n+1} > a_n$. Dimostriamo questa affermazione per induzione. Per $n = 0$ è vera perché $a_0 = 1$ e $a_1 = \sqrt{2}$. Inoltre se per n è vera allora $1 + a_{n+1} > 1 + a_n$ e quindi prendendo le radici quadrate $a_{n+2} > a_{n+1}$.

Osserviamo inoltre che la condizione $a_{n+1} > a_n$ è equivalente a $\sqrt{1+a_n} > a_n$ ovvero ad $a_n^2 - a_n - 1 < 0$ e questo implica che $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Quindi abbiamo dimostrato che la successione è crescente e limitata. Quindi ha limite finito che indichiamo con L. Passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ otteniamo $L = \sqrt{1+L}$ da cui $L^2 - L - 1 = 0$ ovvero $L = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ Osserviamo infine che essendo $a_n \geqslant 1$ dobbiamo avere anche che $L \geqslant 1$ quindi $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soluzione esercizio 4. Si tratta di una serie di potenze e indico con R il suo raggio di convergenza. In particolare la serie convergerà in $(-R, R)$ e non convergerà fuori da $[-R, R]$. Analizziamo inanzitutto il caso di $x \geqslant 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Se applichiamo il criterio del rapporto troviamo che

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2\log(n+1)}}{\frac{x^n}{n^2\log n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} x\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\log n}{\log(n+1)} = x$$

Infatti il fattore x converge a x, il fattore $n^2/(n+1)^2$ converge a 1 e il fattore $\log(n)/\log(n+1)$ applicando il criterio di de l'Hopital diventa $(n+1)/n$ che pure converge a 1. Quindi la serie converge se $0 \leqslant x < 1$ e diverge per $x > 1$, in particolare $R = 1$. Rimangono da studiare i casi $x = 1$ e $x = -1$.

Per $x = 1$ a serie è $\sum_n \frac{1}{n^2\log n}$ il cui termine generale è minore di $1/n^2$ e quindi converge.

Per $x = -1$ a serie è $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n^2\log n}$. Osserviamo che se prendiamo la serie dei valori assoluti otteniamo la serie considerata per $x = 1$. Quindi per $x = -1$ converge assolutamente e quindi converge.

Soluzione esercizio 5. Studiamo la funzione f_a. Analizziamo prima il caso $a \geqslant 0$. Osserviamo che il limite per x che tende a $-\infty$ è $-\infty$ e il limite per x che tende a $+\infty$ è $+\infty$. Calcoliamo la derivata, otteniamo $f_a'(x) = 3(x^2 - a^2)$ che è negativa per $x \in (-a, a)$, zero in $x = \pm a$ e positiva altrimenti. Quindi f_a è crescente in $(-\infty, -a]$, decrescente in $[-a, a]$ e crescente in $[a, \infty]$. In ognuno di questi intervalli può quindi avere al massimo uno zero. Osserviamo che $f_a(-a) = 4a^3 + 1 > 0$ quindi per il teorema degli zeri di Bolzano sicuramente ha uno zero nel primo intervallo. Similmente negli altri due intervalli ha uno zero se e solo se $f_a(a) < 0$ o se $f_a(a) = 0$. Se $f_a(a) = 0$ questo zero è $x = a$ e la funzione ha due zeri. Quindi la condizione per avere tre zeri è equivalente a $f_a(a) < 0$. Sviluppando otteniamo $-2a^3 + 1 < 0$ ovvero $a < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Se $a < 0$ osserviamo che $f_a = f_{-a}$ quindi otteniamo che ha tre zeri se e solo se $a > -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. Quindi f_a ha tre zeri distinti se e solo se $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < a < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

III compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 31 marzo 2014

Esercizio 1. Sia $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = 1 + 2i$ calcolare $z_1 \cdot z_2$ e $\frac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 2.

a) Si scriva il polinomio di Taylor di $\cos(x)$ di ordine 4 nel punto $x_0 = 0$. Si enunci per la funzione $\cos(x)$, per l'ordine 4 e per il punto $x_0 = 0$ la formula di Taylor con il resto scritto nella forma di Lagrange;
b) Usando la formula di Taylor si trovi un approssimazione di $\cos(1)$ a meno di $\frac{1}{100}$.

Esercizio 3. Si determini il minimo della funzione $f(x) = x\log(x)$.

Esercizio 4. Si dimostri che per ogni $x \in (0, \pi/2)$ si ha

$$x > \frac{\tan(x)}{1 + (\tan(x))^2}.$$

Esercizio 5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x\log(x)}{2\log(x)-1}.$$
Si determinino

a) dominio;
b) segno e zeri;
c) se si può estendere con continuità f agli estremi del dominio di definizione;
d) in caso tale estensione esista si dica se f è derivabile in tali punti;
e) punti di massimo e minimo e punti di massimo e minimo locali (in caso esistano);
f) per quali c l'equazione $f(x) = c$ ha soluzione.

Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 31 marzo 2014

Esercizio 1. Si dica per quali x converge la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})x^n.$$

Esercizio 2. Si calcoli il seguente integrale indefinito
$$\int \frac{1}{1+e^x}dx$$

Esercizio 3. Si determini il minimo della funzione $f(x) = x\log(x)$.

Esercizio 4. Si dimostri che per ogni $x \in (0, \pi/2)$ si ha
$$x > \frac{\tan(x)}{1+(\tan(x))^2}.$$

Esercizio 5. Si consideri la funzione
$$f(x) = \frac{x\log(x)}{2\log(x)-1}.$$
Si determinino

a) dominio;
b) segno e zeri;
c) se si può estendere con continuità f agli estremi del dominio di definizione;
d) in caso tale estensione esista si dica se f è derivabile in tali punti;
e) punti di massimo e minimo e punti di massimo e minimo locali (in caso esistano);
f) Si determini, al variare di c, il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ per x nel dominio di f.

Soluzioni III compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 31 marzo 2014

Soluzioni esercizio 1. Abbiamo
$$z_1 \cdot z_2 = 3 - 8 + (6+4)i = -5 + 10i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3+8+(-6+4)i}{1+4} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$$

Soluzione esercizio 2. a) per quanto detto a lezione tale polinomio è $P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. La formula di Taylor in tale situazione dice che per ogni x esiste c compreso tra 0 e x tale che
$$\cos(x) = P(x) + \frac{D^5(\cos)(c)}{120}x^5 = P(x) - \frac{\sin(c)}{120}x^5$$
infatti la derivata quinta della funzione $\cos(x)$ è uguale a $-\sin(x)$.

b) Per quanto ricordato nel punto a) esiste c compreso tra 0 e 1 tale che $\cos(1) = P(1) - \frac{\sin(c)}{120}$. Poiché
$$0 < \frac{\sin(c)}{120} < \frac{1}{120} < \frac{1}{100}$$
abbiamo che $P(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ approssima $\cos(1)$ a meno di $1/100$.

Soluzione esercizio 3. La funzione è definita e derivabile per $x > 0$. La sua derivata è uguale a $1 + \log(x)$, quindi è positiva per $x > e$ e negativa per $x < 1/e$. Quindi $1/e$ è un punto di minimo assoluto e il minimo di f è uguale a $f(1/e) = -1/e$.

Soluzione esercizio 4. Si consideri la funzione $f(x) = x - \frac{\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$. Tale funzione è continua e derivabile in $[0, \pi/2)$. La sua derivata è uguale a

$$1 - \frac{\big(1+\tan^2(x)\big)^2 - 2\tan^2(x)\big(1+\tan^2(x)\big)}{\big(1+\tan^2(x)\big)^2} = 1 - \frac{1+\tan^2(x) - 2\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{2\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}.$$

Quindi la derivata è positiva in $(0, \pi/2)$, e la funzione è crescente in $[0, \pi/2)$ da cui per $0 < x < \pi/2$ otteniamo

$$f(x) > f(0) = 0$$

che è equivalente alla disuguaglianza desiderata.

Soluzione esercizio 5. a) Il dominio di f è determinato dalla condizione $x > 0$ (perché x compare come argomento del logaritmo) e dalla condizione $2\log(x) - 1 \neq 0$ ovvero $x \neq \sqrt{e}$ (dato dal non annullarsi del denominatore).

b) Studiando il segno del numeratore troviamo che è positivo per $x > 1$, negativo per $x < 1$ e nullo per $x = 1$. Il segno del denominatore è invece positivo per $x > \sqrt{e}$ e negativo per $x < \sqrt{e}$. Quindi (per $x \in D$) abbiamo

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \text{ se e solo se } x = 1,\\ &f(x) > 0 \text{ se e solo se } x < 1 \text{ o } x > \sqrt{e}\\ &f(x) < 0 \text{ se e solo se } 1 < x < \sqrt{e}. \end{aligned}$$

c) Osserviamo che

$$\lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^+} f(x) = \frac{\sqrt{e}}{2} \lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^+} \frac{1}{2\log(x) - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2} \cdot \frac{1}{0^+} = \infty.$$

Infine come abbiamo già verificato molte volte $\lim_{x \longrightarrow 0} x\log(x) = 0$ da cui $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$. Quindi la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $f(0) = 0$ e non si può estendere con continuità in $\sqrt{e}$.

Per il calcolo dell'estremo inferiore osserviamo anche che, similmente a quanto sopra, abbiamo che $\lim_{x \longrightarrow \sqrt{e}^-} f(x) = -\infty$.

d) Calcoliamo il limite del rapporto incrementale nel punto in questione; otteniamo:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(x)}{2\log(x) - 1} = \lim_{y \longrightarrow -\infty} \frac{y}{2y - 1} = \frac{1}{2}.$$

e quindi la funzione è derivabile in 0.

e) Osserviamo inanzitutto che sicuramente f non ha massimi o minimi assoluti perché ha estremo superiore e inferiori uguali a $+\infty$ e $-\infty$.

Per studiare i massimi e minimi locali calcoliamo la derivata di f: otteniamo

$$f'(x) = \frac{\big(1 + \log(x)\big) \cdot \big(2\log(x) - 1\big) - 2\log(x)}{\big(2\log(x) - 1\big)^2} = \frac{2\log^2(x) - \log(x) - 1}{\big(2\log(x) - 1\big)^2}.$$

Per studiarne il segno dobbiamo determinare il segno del numeratore. Studiamo intanto il segno di $2y^2 - y - 1$ e otteniamo che è maggiore di zero per $y < -\frac{1}{2}$ o $y > 1$ e minore di zero per $-\frac{1}{2} < y < 1$. Ponendo $y = \log(x)$ otteniamo che il numeratore è positivo per $x < 1/\sqrt{e} = x_1$ o $x > e$ e negativo per $x_1 < x < e$.

Quindi f è crescente nell'intervallo $(0, x_1]$ e nell'intervallo $[e, +\infty)$ e decrescente nell'intervallo $[x_1, \sqrt{e})$ e nell'intervallo $(\sqrt{e}, e]$. (Si noti che non è decrescente nell'intervallo $[x_1, e]$!!)

Quindi f ha un minimo locale in e e vale $f(e) = e$ e ha un massimo locale in x_1 e vale $f(x_1) = 1/(4\sqrt{e})$.

f) per il teorema di Bolzano e lo studio degli intervalli di monotonia abbiamo che:

- per $x \in (0, x_1]$ la funzione f assume tutti i valori in $(0, 1/(4\sqrt{e}]$ una sola volta;
- per $x \in (x_1, \sqrt{e})$ assume tutti i valori in $(-\infty, 1/(4\sqrt{e}))$ una sola volta;
- per $x \in (\sqrt{e}, e]$ assume tutti i valori in $[e, \infty)$ una sola volta;
- per $x \in (e, \infty)$ assume tutti i valori in (e, ∞) una sola volta.

Quindi

- per $c \leqslant 0$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente una soluzione;
- per $0 < c < 1/(4\sqrt{e})$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni;
- per $c = 1/(4\sqrt{e})$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente una soluzione;
- per $1/(4\sqrt{e}) < c < e$ l'equazione $f(x) = c$ non ha soluzioni;
- per $c = e$ l'equazione $f(x) = e$ ha esattamente una soluzione;
- per $e < c$ l'equazione $f(x) = c$ ha esattamente due soluzioni.

IV compitino di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 28 maggio 2014 ore 16

Esercizio 1. Sia $z = 3 + 5i$, calcolare z^2 e $|z|$.

Esercizio 2. Si consideri la serie,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n}).$$
Dire se converge.

Esercizio 3. Calcolare una primitiva della funzione
$$\frac{x}{x+2+2\sqrt{x+1}}.$$

Esercizio 4. (1) Sia $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Cosa vuol dire che l'integrale $\int_a^b f(t)dt$ è convergente?

(2) Sia $F : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$F(x) = \int_{1/2}^{x} \frac{\log t}{t-1}\, dt.$$
Si dica se F si può estendere in modo continuo in 0 ed in 1.

Esercizio 5. Sia F la funzione definita da
$$F(x) = \int_0^x (e^t - e) \arctan(t)\, dt.$$
Mostrare che F ha esattamente due zeri.

Spunti per la soluzione

Esercizio 1. $z^2 = -16 + 30i$, $|z| = \sqrt{34}$.

Esercizio 2. Per confronto asintotico con $1/n^2$ si ottiene che converge.

Esercizio 3. Mediante la sostitizione $y = \sqrt{x+1}$ si ottiene
$$\int \frac{x}{x+2+2\sqrt{x+1}}dx = \int \frac{2(y^2-1)y}{y^2+1+2y}dy = 2\int \frac{(y-1)(y+1)y}{(y+1)^2}dy = 2\int \frac{(y-1)y}{y+1}dy =$$
Infine osserviamo che $(y-1)y = y^2 - y = (y+1)(y-2) + 2$ da cui
$$2\int \frac{(y-1)y}{y+1}dy = 2\int y - 2dy + 4\int \frac{1}{y+1}dy = y^2 - 4y + \log(y+1) = x - 4\sqrt{1+x} + \log(1+\sqrt{1+x}).$$

Esercizio 4. (1) Vuol dire che esiste finito il seguente limite:
$$\lim_{c \longrightarrow b^-} \int_a^c f(t)\, dt.$$
(2) Si deve stabilire se esistono finiti i limiti
$$\lim_{x\longrightarrow 1} F(x) \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} F(0).$$
Ovvero se gli integrali $\int_{1/2}^1 \frac{\log t}{t-1}dt$ e $\int_0^{1/2} \frac{\log t}{t-1}dt$ convergono.

Nel primo caso osserviamo che $\lim_{t\longrightarrow 1} \frac{\log t}{t-1} = 1$ (per esempio con de l'Hopital o ponendo $s = t - 1$), quindi si tratta di un integrale di una funzione continua definita in $[1/2, 1]$. E quindi l'integrale in particolare converge.

Nel secondo caso procediamo per confronto asintotico con $x^{-1/2}$ e osserviamo che
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\log x}{x-1}}{x^{-1/2}} = \lim \frac{-\log x}{x^{-1/2}}$$

che e' della forma ∞/∞e applicando de l'Hopital otteniamo $\lim_{x\longrightarrow 0} 2x^{1/2} = 0$. Quindi, poiché l'integrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ è convergente anche l'integrale $\int_0^{1/2} \frac{\log t}{t-1} dt$ è convergente e quindi F si può estendere con continuità anche in 0.

Esercizio 5. si noti che la derivata di F è la funzione $(e^x - e)\arctan x$ e quindi è positiva per $x < 0$ e per $x > 1$. Quindi F è crescente in $(-\infty, 0]$ e in $[1, \infty)$. In particolare 0 è un punto di massimo locale nel quale la funzione vale zero. Inoltre poiché $(e^x - e)\arctan x > 1$ per x grande otteniamo che $\lim_{x\longrightarrow\infty} F(x) = \infty$ e quindi F ha un secondo zero nell'intervallo $(1, \infty)$.

Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2013-2014, 5 giugno 2014, ore 15:00, aule A,B,C

Esercizio 6. Si calcoli una primitiva della funzione $e^{\sqrt{x}}$.

Esercizio 7. Sia $z = 5 - 12i$. Determinare tutti i numeri complessi w tali che $w^2 = z$.

Esercizio 8. Si dica se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sin(1/n)}$$

è convergente.

Esercizio 9. (1) Si determinino dominio, zeri, segno, punti di massimo e minimo locali della funzione

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}.$$

(2) Si determini inoltre l'immagine di f.

Esercizio 10. Siano F e G le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_0^x \sin(x+1)(e^x - 1)\, dx \qquad G(x) = \int_0^x x\, dx$$

Si calcoli

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)}.$$

Soluzioni.

Soluzione primo esercizio del compito. Operiamo il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x}$ ovvero $2ydy = dx$. Sostituendo otteniamo

$$2\int ye^y dy = 2ye^2 - 2\int e^y dy = (2y-2)e^y$$

Quindi $f(x) = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}$ è una primitiva di $e^{\sqrt{x}}$.

Soluzione secondo esercizio del compito. Sia $w = a + ib$ imponendo $w^2 = 5 - 12i$ otteniamo

$$a^2 - b^2 = 5 \qquad 2ab = -12$$

Ricavando la b dalla seconda equazione e sostituendo otteniamo

$$a^4 - 5a^2 - 36 = 0$$

da cui $a^2 = 9$ o $a^2 = -4$. Essendo a^2 positivo la seconda possibilità non si verifica, quindi $a^2 = 9$ ovvero $a = 3$ e $b = -2$ o $a = -3$ e $b = 2$.

Soluzione terzo esercizio del compito. Confrontiamo la serie con la serie armonica. Abbiamo

$$\lim \frac{1/n}{\frac{1}{n^2\sin(1/n)}} = \lim \frac{\sin(1/n)}{1/n} = 1$$

Quindi la serie si comporta come la serie $\sum 1/n$ che sappiamo divergere.

Soluzione quarto esercizio del compito. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Segno e zeri: $f(x) > 0$ se e solo se $x+1 > 0$ perché il fattore con l'esponenziale è sempre positivo. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x > -1$.

Similmente $f(x) = 0$ se e solo se $x = -1$ e $f(x) < 0$ se e solo se $x < -1$.

Per determinare massimi e minimi locali calcoliamo la derivata di f, otteniamo

$$Df(x) = e^{1/x}(-\frac{x+1}{x^2} + 1).$$

Quindi la derivata è positiva se e solo se $x^2 - x - 1 > 0$ ovvero per $x < a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o per $x > b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e negativa all'interno di questi due valori. Ne deduciamo che la funzione è crescente nell'intervallo $(-\infty, a]$ e nell'intervallo $[b, \infty)$, e è decrescente negli intervalli $[a, 0)$ e $(0, b]$. Quindi a è un punto di massimo locale e b di minimo locale.

Osserviamo infine che abbiamo che $\lim_{x\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ infatti il termine con l'esponenziale tende a 1 in questi casi.

Quindi per il teorema di Bolzano l'immagine di f è l'unione degli intervalli $(-\infty, f(a)]$ e $[f(b), \infty)$.

Verifichiamo infine che si tratta di due intervalli disgiunti ovvero che $f(a) < f(b)$. Abbiamo

$$f(a) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1-\sqrt{5}}} \qquad f(b) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}$$

Quindi $f(a) < f(b)$ è equivalente a

$$\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} < e^{\frac{2}{1+\sqrt{5}} - \frac{2}{1-\sqrt{5}}}$$

ovvero a

$$7 - 3\sqrt{5} < e^{\sqrt{5}}$$

Questa disuguaglianza è vera infatti il termine sulla sinistra è minore di 1 (per via di $\sqrt{5} > 2$) e quello sulla destra è maggiore di 1 (per via di $\sqrt{5} > 0$).

Soluzione quinto esercizio del compito. Osserviamo che F e G sono due funzioni continue e derivabile con $F(0) = G(0) = 0$ sono quindi nelle condizioni di provare ad applicare il criterio di de l'Hopital. Abbiamo $DF(x) = \sin(x+1)(e^x - 1)$ e $DG(x) = x$ e quindi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \sin(x+1) \frac{e^x - 1}{x} = \sin 1.$$