Analisi Matematica B - Compitino del 2 aprile 2012

Testi e soluzioni di entrambe le versioni

Esercizio 1A. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x+2)^2}$$

è continua e trovare una primitiva di f su tale insieme.

Soluzione. Fattorizzando $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ e semplificando, troviamo

$$f(x) = \frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Trattandosi del rapporto tra due polinomi, che sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, f è continua su $\mathbb{R}$ meno i punti in cui si annulla il denominatore, ossia $x = 1$ e $x = -2$.

Sappiamo che f è esprimibile mediante somma di frazioni semplici, ossia vale

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}, \tag{1}$$

con a, b, c costanti da determinare. Moltiplicando ambo i membri di (1) per $x-1$ si trova

$$\frac{x+1}{(x+2)^2} = a + \frac{b(x-1)}{x+2} + \frac{c(x-1)}{(x+2)^2},$$

da cui, ponendo $x = 1$, si determina

$$a = \frac{2}{9}.$$

Analogamente, moltiplicando ambo i membri di (1) per $(x+2)^2$ si trova

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{a(x+2)^2}{x-1} + b(x+2) + c,$$

da cui, ponendo $x = -2$, si determina

$$c = \frac{1}{3}.$$

Usando i valori trovati sopra per a e c ed usando (1) con $x = -1$, si trova

$$b = -\frac{2}{9}.$$

Dunque

$$f(x) = \frac{2}{9(x-1)} - \frac{2}{9(x+2)} + \frac{1}{3(x+2)^2},$$

e una primitiva di f è la funzione

$$F(x) = \frac{2}{9}\log|x-1| - \frac{2}{9}\log|x+2| - \frac{1}{3(x+2)}.$$

Esercizio 1B. Determinare il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-4}{(x+2)^2(x-1)^2}$$

è continua e trovare una primitiva di f su tale insieme.

Soluzione. Fattorizzando $x^2-4=(x-2)(x+2)$ e semplificando, troviamo

$$f(x) = \frac{x-2}{(x+2)(x-1)^2}.$$

Trattandosi del rapporto tra due polinomi, che sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$, f è continua su $\mathbb{R}$ meno i punti in cui si annulla il denominatore, ossia $x=-2$ e $x=1$.

Sappiamo che f è esprimibile mediante somma di frazioni semplici, ossia vale

$$\frac{x-2}{(x+2)(x-1)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}, \tag{2}$$

con a, b, c costanti da determinare. Moltiplicando ambo i membri di (2) per $x+2$ si trova

$$\frac{x-2}{(x-1)^2} = a + \frac{b(x+2)}{x-1} + \frac{c(x+2)}{(x-1)^2},$$

da cui, ponendo $x=-2$, si determina

$$a = -\frac{4}{9}.$$

Analogamente, moltiplicando ambo i membri di (2) per $(x-1)^2$ si trova

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{a(x-1)^2}{x+2} + b(x-1) + c,$$

da cui, ponendo $x=1$, si determina

$$c = -\frac{1}{3}.$$

Usando i valori trovati sopra per a e c ed usando (2) con $x=2$, si trova

$$b = \frac{4}{9}.$$

Dunque

$$f(x) = -\frac{4}{9(x+2)} + \frac{4}{9(x-1)} - \frac{1}{3(x-1)^2},$$

e una primitiva di f è la funzione

$$F(x) = -\frac{4}{9}\log|x+2| + \frac{4}{9}\log|x-1| + \frac{1}{3(x-1)}.$$

Esercizio 2A. Data la funzione

$$f(x) = \int_x^2 t \log^2 t \, dt,$$

calcolare $f(1)$ e $f'(3)$.

Soluzione. Una primitiva di t è $t^2/2$, mentre la derivata di $\log^2 t$ è $(2 \log t)/t$. Perciò, integrando per parti due volte, si trova

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^2 t \log^2 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \log^2 t\right]_1^2 - \int_1^2 t \log t \, dt = 2 \log^2 2 - \left[\frac{t^2}{2} \log t\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{t}{2} \, dt \\ &= 2 \log^2 2 - 2 \log 2 + \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^2 = 2 \log^2 2 - 2 \log 2 + 1 - \frac{1}{4} = 2 \log^2 2 - 2 \log 2 + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Invertendo gli estremi di integrazione, si ha che

$$f(x) = -\int_2^x t \log^2 t \, dt = \int_2^x (-t \log^2 t) \, dt.$$

Perciò il teorema fondamentale del calcolo integrale implica che f è una primitiva della funzione $t \mapsto -t \log^2 t$. La sua derivata nel punto 3 vale dunque

$$f'(3) = -3 \log^2 3.$$

Esercizio 2B. Data la funzione

$$f(x) = \int_x^3 t \log^2 t \, dt,$$

calcolare $f(1)$ e $f'(2)$.

Soluzione. Una primitiva di t è $t^2/2$, mentre la derivata di $\log^2 t$ è $(2 \log t)/t$. Perciò, integrando per parti due volte, si trova

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^3 t \log^2 t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \log^2 t\right]_1^3 - \int_1^3 t \log t \, dt = \frac{9}{2} \log^2 3 - \left[\frac{t^2}{2} \log t\right]_1^3 + \int_1^3 \frac{t}{2} \, dt \\ &= \frac{9}{2} \log^2 3 - \frac{9}{2} \log 3 + \left[\frac{t^2}{4}\right]_1^3 = \frac{9}{2} \log^2 3 - \frac{9}{2} \log 3 + \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{9}{2} \log^2 3 - \frac{9}{2} \log 3 + 2. \end{aligned}$$

Invertendo gli estremi di integrazione, si ha che

$$f(x) = -\int_3^x t \log^2 t \, dt = \int_3^x (-t \log^2 t) \, dt.$$

Perciò il teorema fondamentale del calcolo integrale implica che f è una primitiva della funzione $t \mapsto -t \log^2 t$. La sua derivata nel punto 2 vale dunque

$$f'(2) = -2 \log^2 2.$$

Esercizio 3A. Esprimere mediante una serie di potenze una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{x^2},$$

specificandone il raggio di convergenza.

Soluzione. Dallo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale ricaviamo che

$$f(x) = e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema di integrazione delle serie di potenze concludiamo che una primitiva di f è la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{n!} t^{2n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}$$

e che questa serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza di quella iniziale, ossia $r = \infty$.

Esercizio 3B. Esprimere mediante una serie di potenze una primitiva della funzione

$$f(x) = e^{x^3},$$

specificandone il raggio di convergenza.

Soluzione. Dallo sviluppo in serie di potenze dell'esponenziale ricaviamo che

$$f(x) = e^{x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{3n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema di integrazione delle serie di potenze concludiamo che una primitiva di f è la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^{3n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{1}{n!} t^{3n}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(3n+1)} x^{3n+1}$$

e che questa serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza di quella iniziale, ossia $r = \infty$.