Analisi Matematica B - Compitino del 2 aprile 2012

Testi e soluzioni di entrambe le versioni

Esercizio 1A. Dire se $x = 0$ è punto di massimo locale, di minimo locale, o nessuna delle due cose per la funzione

$$f(x) = \sin(e^x - 1) + \cos x - x.$$

Soluzione. Sfruttando lo sviluppo

$$e^x - 1 = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

e gli sviluppi di seno e coseno, sviluppiamo la funzione f fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - 1 - \tfrac{1}{6}(e^x - 1)^3 + o((e^x - 1)^4) + 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) - x \\
&= x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \tfrac{1}{6}\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big)^3 + o(x + o(x))^4 \\
&\quad +1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) - x \\
&= 1 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{12}x^4 - \tfrac{1}{6}\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big)^3 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente il cubo che compare nella formula sopra, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al quarto:

$$\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2)\Big)^3 = x^3 + \tfrac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

Mettendo assieme i due sviluppi, troviamo

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{6}x^4 + o(x^4) = 1 - x^4\Big(\tfrac{1}{6} + o(1)\Big),$$

che mostra che $x = 0$ è un punto di massimo locale.

Esercizio 1B. Dire se $x = 0$ è punto di massimo locale, di minimo locale, o nessuna delle due cose per la funzione

$$f(x) = \cos(e^x - 1) + \frac{x^2}{2(1 - x)}.$$

Soluzione. Sfruttando lo sviluppo

$$e^x - 1 = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

e gli sviluppi del coseno e di $1/(1 - x)$, sviluppiamo la funzione f fino al quarto ordine:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 1 - \tfrac{1}{2}(e^x - 1)^2 + \tfrac{1}{24}(e^x - 1)^4 + o((e^x - 1)^5) + \tfrac{1}{2}x^2(1 + x + x^2 + o(x^2)) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 + \tfrac{1}{24}(x + o(x))^4 + o(x + o(x))^5 \\
&\quad +\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 - \tfrac{1}{2}\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) + o(x^5) + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 + o(x^4) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{13}{24}x^4 - \tfrac{1}{2}\Big(x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)\Big)^2 + o(x^4).
\end{aligned}$$

Calcoliamo separatamente il quadrato che compare nella formula sopra, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al quarto:

$$\left(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2 = x^2+\tfrac{1}{4}x^4+x^3+\tfrac{1}{3}x^4+o(x^4) = x^2+x^3+\tfrac{7}{12}x^4+o(x^4).$$

Mettendo assieme i due sviluppi, troviamo

$$f(x) = 1+\tfrac{1}{4}x^4+o(x^4) = 1+x^4\left(\tfrac{1}{4}+o(1)\right),$$

che mostra che $x=0$ è un punto di minimo locale.

Esercizio 2A. Dire se la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

converge ed in caso affermativo calcolarne la somma.

Soluzione. Dato che

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2k+1}\right).\end{aligned}$$

La quantità sopra tende a $1/6$ per $k\to\infty$, quindi la serie data converge ed ha somma $1/6$.

Esercizio 2B. Dire se la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

converge ed in caso affermativo calcolarne la somma.

Soluzione. Dato che

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big),$$

troviamo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}\Big(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2k+1}\Big).\end{aligned}$$

La quantità sopra tende a $1/2$ per $k \to \infty$, quindi la serie data converge ed ha somma $1/2$.

Esercizio 3. Sfruttando l'identità $\log 5 = -\log(1/5)$, verificare che

$$\log 5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n5^n}.$$

Dimostrare che la somma dei primi 3 termini di questa serie differisce da $\log 5$ per meno di $1/3$.

Soluzione. Dallo sviluppo della funzione $\log(1+x)$ per $-1 < x \leq 1$, si ha

$$\begin{aligned}\log 5 &= -\log\frac{1}{5} = -\log\Big(1 - \frac{4}{5}\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(-\frac{4}{5}\Big)^n \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n\frac{4^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n5^n}.\end{aligned}$$

La differenza tra $\log 5$ e la somma dei primi 4 termini della serie vale

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4^n}{n5^n}.$$

Questo numero positivo può essere maggiorato nel modo seguente

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4^n}{n5^n} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{4^n}{5 \cdot 5^n} = \frac{1}{5}\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^5}{1-\frac{4}{5}} = \left(\tfrac{4}{5}\right)^4 = \tfrac{256}{625},$$

che è minore di $1/2$.

Esercizio 3B. Sfruttando l'identità $\log 3 = -\log(1/3)$, verificare che

$$\log 3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}.$$

Dimostrare che la somma dei primi 4 termini di questa serie differisce da $\log 3$ per meno di $1/10$.

Soluzione. Dallo sviluppo della funzione $\log(1+x)$ per $-1 < x \leq 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\log 3 &= -\log \frac{1}{3} = -\log\Big(1 - \frac{2}{3}\Big) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(-\frac{2}{3}\Big)^n \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-1)^n \frac{2^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}.
\end{aligned}$$

La differenza tra $\log 3$ e la somma dei primi 4 termini della serie vale

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}.$$

Questo numero positivo può essere maggiorato nel modo seguente

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n} \leq \sum_{n=5}^{\infty} \frac{2^n}{5 \cdot 3^n} = \frac{1}{5} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{5 \cdot 3^4} = \frac{32}{5 \cdot 81} = \frac{32}{405}$$

che è minore di $1/10$.