1. Diario delle lezioni corso di Analisi Matematica 2011-2012

Lezione 1; lunedì 24 settembre 2012, 2 ore.
qualche richiamo sugli insiemi;
numeri naturali, interi e razionali: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$;
numeri reali: proprietà algebriche;
numeri reali: proprietà di ordinamento;
riferimenti: dispense Abbondandolo lez. 1, libro Acquistapace par. 1.1, 1.2, 1.4.

Lezione 2; mercoledì 26 settembre 2012, 2 ore.
valore assoluto e disuguaglianza triangolare;
disuguaglianza di Bernoulli, esercizi;
media aritmetica e media geometrica per due numeri reali;
disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica per due numeri reali;
esempi di studio di problemi di minimo usando la disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica;
riferimenti: dispense Abbondandolo lez. 1, lez. 2, libro Acquistapace par. 1.9 (prima parte), par. 1.8 (seconda parte).

Lezione 3; lunedì 1 ottobre 2012, 2 ore.
correzione deglie esercizi assegnati mercoledì 26 settembre;
sommatorie e produttorie;
media aritmetica e geometrica per n numeri reali;
disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica (enunciato);
riferimenti: il testo degli esercizi assegnati il 26/9, dispense Abbondanolo lez. 2, libro Acquistapace pg. 26, par. 1.8.

Lezione 4; mercoledì 3 ottobre 2012, 2 ore.
disuguaglianza tra media aritmetica e geometrica (dimostrazione);
l'assioma di completezza;
massimi e minimi di un insieme;
insiemi limitati superiormente e inferiormente, maggioranti e minoranti;
estremo superiore ed inferiore;
caratterizzazione dell'estremo superiore ed inferiore;
proprietà di Archimede;
riferimenti: dispense Abbondanolo lez. 3, libro Acquistapace par. 1.5

Lezione 5; lunedì 8 ottobre 2012, 2 ore.
correzione degli esercizi del 3 ottobre;
cenni sulla costruzione dei numeri reali.

Lezione 6; lunedì 15 ottobre 2012, 2 ore.
costruzione dei numeri reali: verifica dell'assioma di completezza;
successioni, successioni date per induzione, successioni limitare;
esempi di successioni;
successione di Fibonacci e formula chiusa per la successione di Fibonacci;
successioni aritmetiche e geometriche.
riferimenti: dispense Abbondanolo lez. 4, libro Acquistapace par. 2.1

Lezione 7; mercoledì 17 ottobre 2012, 2 ore.
limite di una successione, successioni convergenti;
esempi;
unicità del limite, limitatezza delle successioni convergenti;
lemma dei due carabinieri, permanenza del segno e confronto;
proprietà alegebriche dei limiti, esempi.
riferimenti: dispense Abbondanolo lez. 5, libro Acquistapace par. 2.1

Lezione 8; lunedì 22 ottobre 2012, 2 ore.
correzione esercizi assegnati il 17 ottobre

Lezione 9; mercoledì 24 ottobre 2012, 2 ore.
proprietà algebriche dei limiti, dimostrazioni;
successioni divergenti;
lemma del confronto per successioni divergenti;
proprietà algebriche delle successioni divergenti;
$\lim a^n$, $\lim a^n/n^k$, $\lim \sqrt{n}$;
successioni crescenti e decrescenti;
riferimenti: dispense Abbondanolo lez. 6 e lez. 7, libro Acquistapace par. 2.1

Lezione 10; lunedì 29 ottobre 2012, 2 ore.
correzione esercizi assegnati il 24 ottobre

Lezione 11; mercoledì 31 ottobre 2012, 2 ore.
dimostrazione di alcuni limiti notevoli;
successioni monotone;
esistenza del limite per successioni monotone ed esempi di calcolo del limite di successioni definite per induzione;
definizione $\exp(x)$.
riferimenti: dispense Abbondanolo lez. 8 e lez. 12, libro Acquistapace par. 2.3

2. mercoledì 7 novembre, prima verifica intermedia

3. Lezione 12, lunedì 12 novembre, 1 ora

Proposizione 1. *Sia $a > 1$ allora* $\lim \frac{a^n}{n^k} = +\infty$

Correzione dell'esercizio 39.

Definizione 2. Sia a_n una successione a valori in un insieme A. Se invece di prendere tutti i termini ne prendiamo solo alcuni, ma comunque infiniti, otteniamo una nuova successione. Una successione così ottenuta si dice una sottosuccessione di a o una sottosuccessione estratta da a.

Più formalmente a è una funzione da $\mathbb{N}$ nell'insieme A. Se $k : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ è una successione strettamente crescente la composizione $b = a \circ k$ è una sottosuccessione estratta da a. In particolare $b_n = a_{k(n)}$ o equivalentemente $b_n = a_{k_n}$.

Lemma 3. *Se una successione ha limite L (finito o infinito) allora ogni sua sottosuccessione ha limite L.*

riferimenti: Dispense di Abbondandolo: lezione 17

4. Lezione 13, lunedì 19 novembre, 2 ore

Correzione esercizi 50, 51, 52, 53, 54.

Teorema 4. *Da ogni successione di numeri reali si può estrarre una sottosuccessione monotona.*

Corollario 5. *Sia a_n una successione a valori reali. Allora si può estrarre da a_n una sottosuccessione che ammette limite (finito o infinito). Se inoltre a_n è una successione limitata si può estrarre da a_n una sottosuccessione che ammette limite finito.*

Funzioni reali di una variabile reale.
Grafico di una funzione, esempi.
Dominio di definizione di una funzione.
Funzioni monotone.
riferimenti: Dispense di Abbondandolo: lezione 17, lezione 7.

5. Lezione 14, mercoledì 21 novembre, 2 ore

Definizione 6. Definiamo $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.

Diremo che un sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ è un intorno di un numero $x_0 \in \mathbb{R}$ se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset U$.

Diremo che un sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ è un intorno di ∞ se esiste R tale che $(R, \infty) \subset U$.

Diremo che un sottoinsieme U di $\mathbb{R}$ è un intorno di $-\infty$ se esiste R tale che $(-\infty, R) \subset U$.

Questa definizione di intorno serve a sintetizzare il concetto di “essere vicino”. Non sarà particolarmente importante per noi ma permette di sintetizzare alcune definizioni. Per esempio se a_n è una successione $\lim a_n = L$ si può formulare nel modo seguente indipendentemente dal fatto che L sia finito o infinito. Per ogni U intorno di L si ha $a_n \in U$ definitivamente.
esempi di intorni

Definizione 7. Sia $A \subset \mathbb{R}$ diciamo che un punto x_0 di $\bar{\mathbb{R}}$ è di accumulazione per A se per ogni intorno U di x_0 esiste $y \in A \cap U$ con $y \neq x_0$.

esplicitazione della defінzione precedente nel caso x_0 finito e $x_0 = \infty$.
esempi di punti di accumulazione: $A = (0, 1]$, $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n}\}$.

Lemma 8. *Sia $A \subset \bar{\mathbb{R}}$ e sia $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$. Il punto x_0 è un punto di accumulazione di A se e solo se esiste una successione $\{a_n\}$ con $a_n \in A$ per ogni n e $a_n \neq x_0$ per ogni n.*

Definizione di limite

Definizione 9. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e siano $x_0, L \in \bar{\mathbb{R}}$. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione di A. Diciamo che il limite di f per x che tende a x_0 è uguale a L e scriviamo

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$$

se per ogni intorno U di L esiste un intorno V di x_0 tale che se $y \in A \cap V$ e $y \neq x_0$ allora $f(y) \in V$.

Se $A = \mathbb{N}$ coincide con la definizione già data di limite di successione.
Esplicitazione della definizione nel caso x_0 finito.
Cosa vuol dire che non è vero che $lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$ nel caso x_0 e L finiti.
$A = \mathbb{R}$, $f(x) = c$: $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = c$ per ogni $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$;
$A = \mathbb{R}$, $f(x) = x$: $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = x_0$ per ogni $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$;
$A = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \infty$.

6. Lezione 15, mercoledì 21 novembre, 2 ore

Correzione esercizi 55, 57, 61, 62.

Proposizione 10. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora, se esiste, il limite di f per x che tende a x_0 è unico.*

Correzione esercizio 58. Sappiano che a_n non ha limite. In particolare non ha limite infinito. Quindi esiste R tale che per ogni n_0 esiste $m > n_0$ e $a_m < R$. Costruziamo quindi una sottosuccessione successione in questo modo: Definiamo $h(0) = 0$. Costruito $h(n)$, costruiamo $h(n+1)$ nel seguente modo: scegliamo $m > h(n)$ tale che $a_m < R$. Allora $a_{h(n)}$ è una sottosuccessione di a_n tale che $a_{h(n)} < R$ per ogni n. Ora sia b_n una sottosuccessione monotona estratta da $a_{h(n)}$, per il teorema sulle sottosuccessioni monotone abbiamo che b_n ha limite e che $\lim b_n \leqslant R$.

Proposizione 11. *Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$ se e solo se per ogni successione a_n a valori in $A \smallsetminus \{x_0\}$ con $\lim a_n = x_0$ si ha $\lim f(a_n) = L$.*

Permanenza del segno e confronto. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Siano $f, g, h : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

Proposizione 12.
(1) Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L > 0$ allora esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in A \smallsetminus \{x_0\}$ e $|x - x_0| < \delta$ allora $f(x) > 0$;
(2) Se $x_0 = \infty$ e $lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L > 0$ allora esiste R tale che se $x \in A$ e $x > R$ allora $f(x) > 0$;
(3) Se $f(x) \leqslant g(x)$ per ogni $x \in A$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \leqslant \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)$ (se i due limiti esistono);
(4) Se $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ per ogni $x \in A$ e $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = L$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = L$.

Proprietà algebriche dei limiti. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$; $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = M$ con L e M finiti. Allora
(1) $\lim_{x \longrightarrow x_0} (f + g)(x) = L + M$;
(2) $\lim_{x \longrightarrow x_0} (f - g)(x) = L - M$;
(3) $\lim_{x \longrightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$;
(4) se $M \neq 0$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} (\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{M}$;

(5) se $M = 0$, $g(x) > x$ per ogni $x \in A$ e $L > 0$ vale anche $\lim_{x \longrightarrow x_0} (\frac{f}{g})(x) = \infty$.

Con le convenzioni $\infty + \infty = \infty$, $+\infty + finito = \infty$ $\infty \cdot \infty = \infty$, $+\infty \cdot positivo = \infty$ le formule (1) e (2) valgono anche per $L = \infty$ o $M = \infty$.

Similmente per $-\infty$.

riferimenti: dispense Abbondandolo lezione 7 e 9

7. Lezione 16, mercoledì 28 novembre, 2 ore

Proprietà algebriche dei limiti: seconda parte. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \infty$. Sotto opportune ipotesi possiamo dire qualcosa dei limiti del prodotto o della somma di f, g

(1) Se $g(x) \geqslant c \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in A$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) + g(x) = \infty$;
(2) Se $g(x) \geqslant c > 0$ per ogni $x \in A$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)g(x) = \infty$;
(3) Se $g(x) \leqslant c < 0$ per ogni $x \in A$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)g(x) = -\infty$;
(4) $\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Radice quadrata. In seguito vedremo che la funzione $f(x) = x^a$ con $a > 0$ e $x \geqslant 0$ ha le seguenti proprietà:

(1) se $x_0 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ allora $\lim_{x \longrightarrow x_0} x^a = x_0^a$;
(2) $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^a = +\infty$.

A lezione sono state dimostrate queste proprietà nel caso $a = \frac{1}{2}$.

Funzioni continue.

Definizione 13. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è continua in x_0 se x_0 non è di accumulazione per A o se x_0 è di accumulazione e

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dice che f è continua in A se è continua in ogni punto di A.

La funzione $f(x) = x$ e $f(x) = costante$ sono continue. La funzione $f(x) = x^a$ è continua.

Siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continue in $x_0 \in \mathbb{R}$ allora

(1) $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ sono continue in x_0;
(2) se $g(x_0) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.

Le funzioni razionali sono continue in tutti i punti in cui sono definite. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono continue.

Funzione composta.

Proposizione 14. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ sia $h = g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$ e $y_0 = f(x_0) \in B$. Se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 allora h è continua in x_0.*

Corollario 15. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$. Sia $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0 \in B$. Se g è continua in y_0 allora*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f(x) = g(y_0) = g(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x))$$

Corollario 16. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$. Sia $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0$. Sia $y_0 \notin B$ un punto di accumulazione di B e sia $\lim_{y \longrightarrow y_0} g(y) = L$. Allora*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g \circ f(x) = g(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)) = L.$$

esempi di calcolo di limiti. riferimenti: dispense Abbondandolo lezione 9

8. Lezione 17, lunedì 3 dicembre, 2 ore

Correzione esercizi di mercoledì 28 novembre

Zeri di funzioni continue. Se una funzione continua definita su un intervallo assume valori positivi e negativi allora ssume anche il valore zero. Questo fatto abbastanza intuitivo è il contenuto del teorema di Bolzano.

Teorema 17. *sia $a < b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione ed esempi di applicazione del teorema di Bolzano
Due corollari del precedente teorema sono i seguenti.

Corollario 18. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora $f(I)$ è un intervallo.*

Corollario 19. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva. Allora f è strettamente monotona.*

L'ultimo corollario ha il seguente inverso.

Proposizione 20. *Siano $I, J \subset \mathbb{R}$ due intervalli e sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione monotona e suriettiva. Allora f è continua.*

Esempi.
riferimenti: dispense Abbondandolo lezione 10

9. Lezione 18, mercoledì 5 dicembre, 2 ore

Inversa di funzioni continue. Siano $A, B \subset mR$ e sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione bigettiva. Vogliamo dimostrare che sotto opportune ipotesi su A anche l'inversa è continua.

Teorema 21. *Siano I, J due intervalli di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \longrightarrow J$ una funzione continua e bigettiva, allora $f^{-1} : J \longrightarrow I$ è una funzione continua.*

Esempi di funzioni continue.

La funzione esponenziale. Dato un numero reale x definiamo la seguente successione:

$$a_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Abbiamo già dimostrato che, fissato x, per n abbastanza grande la successione è crescente. Definiamo quindi

$$\exp(x) = \lim_n a_n(x).$$

Introduciamo inoltre la successione $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Si noti che a priori $\exp(x)$ potrebbe essere anche più infinito. Il seguente lemma dimostra che tale numero è sempre un numero finito.

Lemma 22. *(1)* $\exp(x) > 0$ *per ogni x;*
(2) $\exp(x) \leqslant 1$ *per $x \leqslant 0$;*
(3) b_n è una successione decrescente;
(4) $a_n(1) \leqslant b_n$ *per ogni n;*
(5) $2 < \exp(1) < 4$;
(6) $\exp(x) \in \mathbb{R}$ *per ogni x.*

Il numero $\exp(1)$ si indica con e ed è circa $2,7$.

proprietà della funzione esponenziale.

1) $\exp(0) = 1$ e $\exp(x) > 0$ per ogni x;
2) Se $x < y$ si ha
$$(y - x)\exp(x) \leqslant \exp y - \exp x \leqslant (y - x)\exp(y).$$
3) $\exp(x)$ è strettamente crescente.
4) $\exp(x)$ è continua.
5) Se x_n è una successione con limite il numero x_0 allora
$$\lim \left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n = \exp(x_0).$$
6) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.
7) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

8) Se $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ allora

$$\exp(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{e^p}.$$

9) $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.
10) $\exp(x) \geqslant 1 + x$;
11) $\lim_{x \longrightarrow \infty} e^x = \infty$;
12) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} e^x = 0$.

La funzione logaritmo. Le proprietà della dimostrazione esponenziale dimostrate simplicano che $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ è una funzione bigettiva. L'inversa è la funzione logaritmo o logaritmo in base e o logaritimo naturale che noi indicheremo con $\log : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

riferimenti: dispense Abbondandolo lezione 12

10. Lezione 19, lunedì 10 dicembre, 2 ore

Dimostrazione di alcune proprietà della funzione esponenziale.

Definizione di a^x e $\log_a x$. . Sia $a > 0$ (e per la definizione del logaritmo in base a si assume anche diverso da 1) allora si definisce:

$$a^x = e^{(\log a)x} \qquad \log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

Grafici e proprietà dell'esponenziale e logaritmo con base qualsiasi.

$$(x^y)^z = x^{y \cdot z} \qquad \log x^y = y \log x.$$

Massimi e minimi. Definizione di punto di massimo e punto di minimo, di valore massimo e minimo. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Un elemento $x_0 \in A$ si dice un *punto di massimo* di f se per ogni $x \in A$ si ha $f(x_0) \geqslant f(x)$. In tal caso $f(x_0)$ si dice il valore massimo o il massimo di A.

Un elemento $x_0 \in A$ si dice un *punto di minimo* di f se per ogni $x \in A$ si ha $f(x_0) \leqslant f(x)$. In tal caso $f(x_0)$ si dice il valore minimo o il minimo di A.

Esempi di funzioni con massimo e minimo, esempi di funzioni senza massimo e minimo.

Teorema 23. *Sia $a < b \in \mathbb{R}$ e sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ha massimo e minimo.*

Punti di massimo e minimo locale. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Un elemento $x_0 \in A$ si dice un *punto di massimo locale* di f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \varepsilon$ si ha $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Un elemento $x_0 \in A$ si dice un *punto di minimo locale* di f se esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $x \in A$ con $|x - x_0| < \varepsilon$ si ha $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Esempi di punti di massimo e minimo locale.

riferimenti: Dispense di Abbondandolo lez. 13 e 17

11. Lezione 20, mercoledì 12 dicembre, 2 ore

Correzione esercizi di giovedì 6 dicembre

12. Lezione 21, lunedì 17 dicembre, 2 ore

Correzione esercizi di mercoledì 12 dicembre

Funzioni convesse. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. f si dice essere essere una funzione convessa se presi due punti sul grafico della funzione e tracciato il segmento che li unisce il grafico della funzione sta sotto il segmento. Algebricamente si può esprimere questa proprietà nel seguente modo Sia $x, y \in I$ e $\alpha \in [0,1]$ allora

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$$

infatti $z = \alpha x + (1-\alpha)y$ è il generico punto del segmento x, y quindi $f(\alpha x + (1-\alpha)y)$ è l'ordinata del punto del grafico di f sopra z mentre $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$ è l'ordinata del punto del segmento sopra z. Un altro modo di esprimere la propietà di convessità è il seguente. Se $x < y < z$ allora

$$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Correzione esercizio 79

13. Lezione 22, lunedì 18 febbraio 2013

La successione $a_{n+1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$.

I numeri complessi.

Definizione dei numeri complessi. Cosa vuol dire definire un insieme di "numeri".

Numeri complessi come coppie di numeri reali. Definizione del prodotto e della somma.

I numeri reali come sottoinsieme dei numeri complessi. Parte reale e parte immaginaria di un numero complesso.

Il numero i.

La notazione $x + iy$. Verifica delle proprietà di campo.

(1) associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a(bc) = (ab)c$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$;
(2) commutativa: $a + b = b + a$ e $ab = ba$ per ogni $a, b \in \mathbb{C}$;
(3) elemento neutro: $0 + a = a$ e $1a = a$ per ogni $a \in \mathbb{C}$;
(4) opposto: per ogni $a \in \mathbb{C}$ esiste $b \in \mathbb{C}$ e $a + b = 0$;
(5) inverso: per ogni $a \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ esiste $b \in \mathbb{C}$ e $ab = 1$;
(6) distributiva: $a(b + c) = ab + ac$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Come si calcola l'inverso, esempi. Equazioni di secondo grado.

La soluzione del problema iniziale $a_n = i(1-i)^n - i(1+i)^n$.

Il coniugato di un numero complesso e il modulo di un numero complesso

(1) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$;
(2) $\overline{zw} = \overline{zw}$;
(3) $z \cdot \overline{z} = |z|$;
(4) $|z + w| \leqslant |z| + |w|$.

riferimenti dispense Abbondanolo lezione 14

14. Lezione 23, mercoledì 20 febbraio 2013

L'esponenziale complesso.

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Proprietà dell'esponenziale complesso

(1) $e^{z+w} = e^z e^w$;
(2) $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$;

In realtà questa definizione è equivalente a

$$e^z = \lim_n \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Cenni sul teorema fondamentale dell'algebra.

Teorema 24. *Sia $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio di grado maggiore o uguale a uno. Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0) = 0$.*

Traccia della dimostrazione

(1) Definizione di funzione continua da $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$. Sia $B \subset \mathbb{C}$ e sia $b_0 \in B$ allora f si dice continua in b_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $b \in B$ e $|b - b_0| < \delta$ allora $|f(b) - f(b_0)| < \varepsilon$.

(2) Sia R un numero positivo e sia $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant R\}$. Sia $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua allora g ha un punto di minimo (la dimostrazioen di questo enunciato è molto simile all'analogo enunciato per il caso reale).
(3) Sia $g(z) = |f(z)$ dove f è il polinomio dell'enunciato del teorema, allora g è continua e $g(z_0) = 0$ se e solo se $f(z_0) = 0$.
(4) g ha un punto di minimo assoluto z_0. Vogliamo dimostrare che $g(z_0) = 0$.
(5) Supponiamo non lo sia allora cambiando variabile e divindendo per una costante si può assumere che il punto di minimo sia 0 e che f sia della forma $f(z) = 1 + az^k + z^{k+1}h(z)$ con h un polinomio e $a \neq 0$. In particolare 1 è il valore minimo.
(6) sia a di argomento θ e modulo ρ. Scegliamo z di argomento $(\pi - \theta)/k$ e modulo t/ρ. Allora abbiamo
$$f(z) = 1 - t^k + t^{k+1}\ell(t)$$
con $\ell(t)$ un polinomio in t a coefficienti complessi
(7) per t piccolo e diverso da zero si ha $|f(z)| < 1$ provando l'assurdo.

15. Lezione 24, lunedì 4 marzo 2013

Correzioni esercizi del 18 febbraio
Definizione di derivata di una funzione, retta tangente.
Derivata della funzione costante, della funzione $f(x) = x$ e dell'esponenziale.
Definizioni equivalenti di derivata. Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ allora la funzione f è derivabile nel punto x e la sua derivata è uguale a ℓ se e solo la funzione
$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \text{per } h \neq 0; \\ \ell & \text{per } h = 0 \end{cases}$$
è continua in $h = 0$. Si noti che abbiamo $f(x+h) = f(x) + h\varphi(h)$ per ogni h.
Continuità di una funzione derivabile.
Derivazione e approssimazione di una funzione con una funzione lineare.
Ordine di infinitesimi. Se f è derivabile in x allora $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$

16. Lezione 25, giovedì 7 marzo 2013, 2 ore

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ e siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in un punto $x \in I$. Allora
(1) $f + g$ è derivabile in x e $D(f+g)(x) = Df(x) + Dg(x)$;
(2) fg è derivabile in x e $D(fg)(x) = f(x)Dg(x) + g(x)Df(x)$;
(3) se $g(x) \neq 0$ allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x e
$$D(\frac{f}{g})(x) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}.$$
Esempi di calcolo di derivata, la derivata di λf e di $1/g$. La derivata di x^n per $n \in \mathbb{Z}$. La derivata di e^x.
Siano I, J intervalli di $\mathbb{R}$ e sia $f : I \longrightarrow J$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $x \in I$ e sia $y = f(x) \in J$. Allora se f è derivabile in x e g in y allora $g \circ f$ è derivabile in x e
$$D(g \circ f)(x) = Dg(y)\, Df(x).$$
Se inoltre $f : I \longrightarrow J$ è bigettiva e continua e se f è derivabile in x e $Df(x)$ allora f^{-1} è derivabile in $y = f(x)$ e
$$D(f^{-1})(y) = \frac{1}{Df(x)}.$$
La derivata di $\log x$, $\sin x$ e $\cos x$.

17. Lezione 26, lunedì 11 marzo 2013, 2 ore

Correzione esercizi sui numeri complessi.

Lemma 25. *Sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $c \in (a,c)$. Se f è un punto di massimo (o di minimo) locale e se f è deriviabile in c allora $f'(c) = 0$.*

Teorema 26 (Teorema di Rolle)**.** *Sia $a < b$ e sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$ allora esiste $a < c < b$ tale che $f'(c) = 0$*

Esempi ed applicazioni.

18. Lezione 27, giovedì 14 marzo 2013, 2 ore

Teorema 27 (Teorema di Lagrange). *Sia $a < b$ e sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b). Allora esiste $a < c < b$ tale che*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 28 (Teorema di Cauchy). *Sia $a < b$ e siano $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue e derivabile in (a, b). Se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora esiste $a < c < b$ tale che*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Corollario 29. *Sia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile in (a, b).*

(1) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è crescente;
(2) Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è decrescente;
(3) Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (a, b)$ allora f è costante.

Esempi di studio di funzioni.

19. Lezione 28, lunedì 18 marzo 2013, 2 ore

Correzione esercizi,

Regola di de l'Hopital. Sia $I = (a, b)$ e siano $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili. Sia $x_0 \in I$. Se $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0} g(x) = 0$ e sia inoltre $g(x), g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$. Se

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

allora

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

.

Dimostrazione della regola di de l'Hopital in questa forma e enunciati più generali.

20. Lezione 29, giovedì 21 marzo 2013, 2 ore

Polinomio di Taylor. Sia x_0 un punto dell'intervallo $I = (a, b)$ e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derviabile m volte. Definiamo il polinomio di Taylor di grado m della funzione f nel punto x_0 il polinomio

$$P_m(h) = \sum_{i=0}^{m} \frac{D^i f(x_0)}{i!} h^i.$$

Vale il seguente teorema: P_m è l'unico polinomio di grado m tale che

$$f(x_0 + h) = P_m(h) + o(h^m).$$

Dimostrazione del teorema ed esempi.

Calcolo dei polinomi di Taylor per alcune funzioni notevoli.

$f(x) = e^x$, $x_0 = 0$.

$$P_m(h) = 1 + h + \frac{1}{2}h^2 + \cdots + \frac{1}{m!}h^m$$

$f(x) = \cos(x)$, $x_0 = 0$.

$$P_{2m}(h) = 1 - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4!}h^4 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{2m!}h^{2m}$$

$f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$.

$$P_{2m+1}(h) = h - \frac{1}{6}h^3 + \frac{1}{5!}h^5 + \cdots + (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!}h^{2m+1}$$

$f(x) = \log(x)$, $x_0 = 1$.

$$P_m(h) = h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + \cdots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}h^m$$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$.

$$P_m(h) = 1 + h + h^2 + \cdots + h^m$$

$f(x) = (1+x)^\alpha$, $x_0 = 0$.

$$P_m(h) = 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)}{m!}h^m$$

21. Lezione 30, lunedì 25 marzo 2013, 2 ore

Esercizi sui Polinomi di Taylor.

Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche. Definizione di arcsin, arccos e arctan.

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad D\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi] \qquad D\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \qquad D\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

22. Lezione 31, giovedì 28 marzo 2013, 2 ore

Esercizi su studi di funzioni, prolungamento della funzione agli estremi dell'intervallo di definizione, massimi e minimi.

Derivate e convessità. Se una funzione definita su intervallo e derivabile ha la derivata crescente allora la funzione è convessa.

23. Lezione 32, lunedì 15 aprile 2013, 2 ore

Formula di Taylor con resto di Lagrange: speigazione e applicazione all'approssimazione di e e di $log(2)$.

Primitive. Sia I un intervallo e sia $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice una primitiva di f se $DF = f$.

Se F, F_1 sono due primitive di f allora esiste una costante c tale che $F_1 = F + c$.

Se f è una funzione, una primitiva di f si indica con $\int f$ o con $\int f(x)\,dx$.

Esempi: le primitive di x^a, x^{-1}, e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Se f e g hanno primitive e c è una costante allora

$$\int f + g = \int + \int g \qquad \int cf = c\int f.$$

Integrazione per parti: sia F una primitiva di f e G una primitiva di g allora

$$\int F\,g = FG - \int f\,G$$

Esempi: $\int x^n e^x$, $\int \log x$, $\int (\cos x)^2$.

24. Lezione 33, giovedì 18 aprile 2013, 2 ore

Integrazione per sostituzione. Sia g derivabile e sia F una primitiva di f.

$\int F(g(x))g'(x)dx = F \circ g$

un altro modo di riscrivere la stessa cosa è

$\int F(g(x))g'(x)dx = \int f(y)dy$ con $y = g(x)$

Esempi $\int xe^{x^2}$, $\int \tan x$

Si puo' usare anche questa formula nell'altro modo

$\int f(x)dx = \int f(g(y))g'(y)dy$ con $x = g(y)$

naturalemente per ricavare alla fine il valore del primo integrale come funzione in x dobbiamo poter riscrivere la formula in funzione di x, un caso particolare si ottine quando g è invertibile. In particolare se $f(x) = h(k(x))$ con $k(x)$ invertibile otteniamo

$\int f(x) = \int \frac{h(y)}{k'(k^{-1}(y))}dy$

Di solito useremo le prime due formulazioni.

Definizione di integrale di una funzione. Per $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata abbiamo definito cosa vuol dire essere integrabile e cosa sia $\int_a^b f(x)dx$.

25. Lezione 34, lunedì 22 aprile 2013, 2 ore

Le funzioni monotone e le funzioni continue sono integrabili (questo secondo risultato senza dimostrazione).

Teorema fondamentale del calcolo.

Calcolo di integrali per parti e per cambiamenti di variabile.

Esempi.

26. Lezione 35, lunedì 29 aprile 2013, 2 ore

Esercizi su integrali.

Integrali impropri.

27. Lezione 36, giovedì 2 maggio 2013, 2 ore

Le ultime lezioni del corso saranno dedicate alle serie. Per questa parte seguiremo le lezioni di Abbondandolo.

Definizione di serie convergente. Sia a_n una successione. A partire da questa successione possiamo costruire una nuova successione detta successione delle somme parziali definendo S_n nel seguente modo:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Nota bene: non sempre il primo termine della successione è a_0, è conveniente lasciare un po' di elasticità su chi sia il primo termine della successione. Se, per esempio, il primo termine della successione è a_3 allora le somme parziali sono definite come $S_n = \sum_{i=3}^{n} a_i$.

La serie è la somma di tutti i termini della successione. Più precisamente se

- esiste finito il limite di S_n diciamo che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge e poniamo $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim S_n$;
- esiste il limite di S_n ma è uguale a $\pm\infty$ diciamo che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ diverge e poniamo $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \lim S_n$;
- se non esiste il limite di S_n diciamo che la serie $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ è indeterminata.

Serie geometrica: Se $|b| < 1$ allora

$$\sum_{i=0}^{\infty} b^i = \frac{1}{1-b}$$

altrimenti, per $b \geqslant 1$ la stessa serie diverge e per $b \leqslant -1$ la serie è indeterminata.

Proprietà algebriche e del confronto. Siano $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ due serie convergenti. Allora

- se $k \in \mathbb{R}$ allora $\sum_{i=1}^{\infty} k\, a_i$ è convergente e $\sum_{i=1}^{\infty} k\, a_i = k \sum_{i=1}^{\infty} a_i$.
- $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)$ è convergente e $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i$;
- se $a_i \leqslant b_i$ per ogni i allora $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} b_i$.

Confronto con gli integrali impropri. Sia a_n una successione. Definiamo una funzione $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$f(x) = a_n \text{ se } n \leqslant x < n + 1.$$

Allora la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge se e solo se l'integrale improprio $\int_0^{\infty} f(x)dx$ converge e vale

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Esempi. La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

Riferimenti: Appunti di Abbondandolo, lezione 26.

28. Lezione 37, lunedì 6 maggio 2013, 2 ore

Alcune osservazioni generali sulle serie. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora $\lim a_n = 0$.

Nello studio delle proprieà di convergenza di una serie, come nello studio dei limiti di successioni possiamo trascurare i primi termini della serie: ovvero $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ converge se e solo se $\sum_{i=n_0}^{\infty} a_i$ converge.

Serie a termini positivi. Sia a_n una successione a termini non negativi allora la serie $\sum_0^{\infty} a_i$ o converge o diverge a $+\infty$.

Siano a_n due successioni a termini non negativi e sia $a_n \leqslant b_n$ per ogni n. Allora se la serie $\sum_0^{\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_0^{\infty} a_n$ converge.

Da questo si deduce facilmente il seguente criterio per serie a termini non negativi. Supponiamo che $b_n > 0$ per ogni n e che esiste $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$ e che sia $0 < L < \infty$ allora la serie $\sum_0^{\infty} a_n$ converge se e solo se la serie $\sum_0^{\infty} b_n$ converge.

Di nuovo su serie e integrali impropri. Sia $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione non negativa e non crescente. Si consideri la successione $a_n = f(n)$. Allora la serie $\sum_1^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\int_0^{\infty} f(x)\, dx$ è definito e vale

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \int_0^{\infty} f(x)dx.$$

Criteri di convergenza per serie a termini positivi. Sia a_n una successione non negativa. Valgono i seguenti criteri di convergenza:

- Supponiamo esista $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$. Se $L < 1$ la serie converge. Se $L > 1$ la serie diverge (questo si chiama criterio della radice ennesima)
- Sia $a_n > 0$ per ogni n. Supponiamo esista $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. Se $L < 1$ la serie converge. (questo si chiama criterio del rapporto)

Riferimenti: Appunti di Abbondandolo, lezione 27.

29. Lezione 39, giovedì 9 maggio 2013, 2 ore

Serie assolutamente convergenti. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se $\sum_0^{\infty} |a_n|$ è convergente.

Se una serie è assolutamente convergente allora è convergente. Questo permette di applicare i risultati ottenuti per le serie a termini positivi anche in molti casi in cui le serie non sono a termini positivi.

Serie a segni alterni, criterio di Leibinz. Sia a_n una successione a termini non negativi. Se $\lim a_n = 0$ a a_n è non crescente allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

è convergente.

Esempi e esercizi.

Riferimenti: Appunti di Abbondandolo, lezione 28.

30. Lezione 40, lunedì 13 maggio 2013, 2 ore

Serie di potenze. Sia a_n una successione. A partire dalla successione a_n e da un numero reale x possiamo costruire una nuova successione $b_n = a_n \cdot x^n$. La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

si dice una serie di potenze e dipende dalla scelta del numero x. Il dominio di convergenza è l'insieme delle x per cui tale serie converge. Si noti che 0 è sempre nel dominio di definizione e definiamo il raggio di convergenza come

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : \text{ la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$$

Vale il seguente lemma:

Sia y un numero reale per il quale la serie converge. Allora la serie converge assolutamente per ogni x con $|x| < |y|$.

In particolare dal lemma precedente ricaviamo che se r è il raggio di convergenza della serie allora la serie converge assolutamente per $x \in (-r, r)$ e definisce quindi una funzione

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Osserviamo inoltre che se esiste $\lim_n \sqrt[n]{|a_n|} = L$ allora il raggio di convergenza è uguale a $\frac{1}{L}$.

Derivazione di serie di potenze e integrazione di serie di potenze. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie si potenze con raggio di convergenza r.

Allora

- Nell'intervallo $(-r, r)$ la funzione f è continua;
- Nell'intervallo $(-r, r)$ la funzione f è derivabile e

  $$Df(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

  in particolare la serie di potenze a destra è convergente in $(-r, r)$;
- Nell'intervallo $(-r, r)$ la funzione f è integrabile e se $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ allora

  $$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

  e la serie sulla destra è convergente in $(-r, r)$.

Esempi. : la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche, la serie geometrica e $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$.

Riferimenti: appunti di Abbondandolo lezione 29.

31. Esercizi, mercoledì 26 settembre 2012

Esercizio 1. Senza ricorrere alla calcolatrice disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$1,12 \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \frac{4}{3} \qquad \sqrt{2}.$$

Esercizio 2. Scrivere il numero $1,2\overline{345}$ come frazione.

Esercizio 3. Dimostrare le seguenti disuguaglianze

a) $(a+b)^2 \leqslant 2(a+b)^2$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$;
b) $\left|a + \frac{1}{a}\right| \geqslant 2$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$;

Esercizio 4. Dimostrare che

$$|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 5. Dimostrare che $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)^2$ per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$

Esercizio 6. Tra tutti i parallelepipedi di volume 1 quale è quello con superficie esterna minima?

Esercizio 7. Tra tutti i parallelepipedi di volune 1 quale è quello con la somma della lunghezza degli spigoli minima?

Esercizio 8. Dimostrare che per ogni intero $n \geqslant 1$ si ha

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}.$$

32. Esercizi, mercoledì 3 ottobre 2012

Esercizio 9. Siano a e b due numeri reali non negativi. Dimostrare che $a \geqslant b$ se e solo se $a^n \geqslant b^n$.

Esercizio 10. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \big(\sum_{i=1}^{n} i\big)^2$$

Esercizio 11. Dimostrare che per ogni numero reale $x \geqslant 1$ e per ogni naturale positivo n si ha

$$\sqrt[n]{x} - 1 \leqslant \frac{x-1}{n}.$$

Esercizio 12. a) Mostrare che se $A \subset B \subset \mathbb{R}$ allora

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B.$$

Si forniscano esempi in cui le disuguaglianze sono strette ed esempi in cui non lo sono.

b) Se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ allora $\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}$.

Esercizio 13. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\};$$
$$B = \{\frac{2x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\};$$
$$C = \{x + \frac{1}{x} : x > 0\};$$
$$D = \{x^2 + y^2 : x, y \in [0,1] \text{ e } x < y\};$$
$$E = \{x^2 - y^2 : 0 < y < x < 4\}.$$

Esercizio 14. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{a + b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \quad b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

Esercizio 15. Se a e b sono due numeri reali e $a < b$ dimostrare che esiste un numero razionale q tale che $a < q < b$.

33. Complementi agli esercizi del 3 ottobre 2012 (venerdì 12 ottobre)

Esercizio 16. Sia n un numero naturale positivo e sia $x \geqslant 0$ un numero reale. In questo esercizio dimostriamo l'esistenza della radice n-esima di x. Sia

$$A = \{y \geqslant 0 \,:\, y^n \leqslant x\}$$

e poniamo $z = \sup A$. Mostrare che

a) A è un insieme limitato, quindi z è un numero reale non negativo;

b) $z^n = x$ (questa seconda parte non è semplice, una soluzione la fornisce il teorema 1.8.1 del libro di Acquistapace, quindi l'esercizio può trasformarsi in capire quella dimostrazione).

Possiamo quindi definire $\sqrt[n]{x}$ come il numero reale z.

Esercizio 17. Siano $x, y \geqslant 0$ due numeri reali. Mostrare che $x \geqslant y$ se e solo se $\sqrt[n]{x} \geqslant \sqrt[n]{y}$.

Esercizio 18. Determinare estremo superiore e inferiore e se esistono massimo e minimo degli insiemi:

$$A = \{\frac{n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$B = \{\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\};$$
$$C = \{\frac{n!}{n^n} : n \in \mathbb{N}_+\};$$
$$D = \{\sqrt{n^2+1} - n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si ricorda che $n!$ è il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a n, ad esempio $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Esercizio 19. Determinare estremo superiore e inferiore e se esiste massimo e minimo dell'insieme

$$A = \{3a + 4b : a, b \in \mathbb{R}, a > 0\ b > 0 \text{ e } ab = 1\}.$$

34. Esercizi, mercoledì 17 ottobre 2012

Esercizio 20. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n; \\ a_0 = 4; \\ a_1 = 17. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione sul modello di quanto abbiamo fatto con la successione di Fibonacci.

Esercizio 21. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}; \\ a_0 = 1. \end{cases}$$

Calcolare l'ennesimo termine della successione.

Esercizio 22. Calcolare, se esiste, il limite delle successioni

$$\frac{n - 6n^4}{1 + n + n^4} \qquad \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^{n+1} - 2}$$

Esercizio 23. Sia a_n una successione di numeri reali. Dimostrare che se $\lim a_n = L$ con $L > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

Esercizio 24. Siano a_n e b_n due successioni di numeri reali convergenti. Dimostrare che se $a_n \leqslant b_n$ definitivamente allora $\lim a_n \leqslant \lim b_n$.

Esercizio 25. Dopo aver osservato che $0 \leqslant \frac{n!}{n^n} \leqslant \frac{1}{n}$ dimostrare che $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$.

Esercizio 26. Calcolare il limite della successione $\frac{2^n}{n!}$.

Esercizio 27. Sia $1 < a$. Dimostrare che $\lim \sqrt[n]{a} = 1$. [Utilizzare la disuguaglianza dell'esercizio 11]. Dimostrare lo stesso risultato per $0 < a \leqslant 1$.

35. Esercizi, mercoledì 22 ottobre 2012

Esercizio 28. Si enuncino e dimostrino l'analogo dei punti 1,2,3 della proposizione dimostrata a lezione nel caso in cui il limite di a_n sia $-\infty$.

Esercizio 29. Sia a_n una sucessione a termini positivi e sia $\lim a_n = L$. Allora $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

Esercizio 30. Si calcoli il limite delle seguenti successioni:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3} \qquad \sqrt[n]{2^n + 3^n} \qquad (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n.$$

Esercizio 31. Sia $a_n < 0$ per ogni n e sia $\lim a_n = 0$. Si dimostri che $\lim \frac{1}{a_n} = -\infty$.

Esercizio 32. Dare un esempio di una successione a_n tale che $a_n \neq 0$ per ogni n, $\lim a_n = 0$ e non esiste il limite di $\frac{1}{a_n}$.

Esercizio 33. Sia F_n la successione di Fibonacci. Si calcoli il limite di $\sqrt[n]{F_n}$.

Esercizio 34. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n; \\ a_0 = 3; \\ a_1 = 11. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione e calcolare il limite di $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 35. Sia $0 < \alpha < 1$ un numero reale fissato e sia a_n la succesione definita da

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) \end{cases}$$

Dimostrare che la successione è decrescente, e limitata. Se ne calcoli il limite.

Esercizio 36. Si dimostri che $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. [dimostrare usando la disuguaglianza aritmogeometrica che per $n \geqslant 2$ si ha $\sqrt[n]{x} \leqslant 1 + \frac{2}{n}(\sqrt{2} - n)$]

36. Esercizi, mercoledì 29 ottobre 2012

Esercizio 37. Determinare, se esiste, il limite della successioni

$$\sqrt[n]{\frac{3^n + n^2}{5^n + 2^n}} \qquad \sqrt[n]{3^{2n} n^3} \qquad \frac{(n+1)! - n!}{n^2\, 3^n}.$$

Esercizio 38. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n; \\ a_0 = -1; \\ a_1 = 3. \end{cases}$$

Dare una formula per calcolare il termine n-esimo della successione.

Esercizio 39. Sia a_n la successione definita per induzione da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}; \\ a_0 = 0. \end{cases}$$

Si dimostri che $a_n \leqslant 2$ per ogni n e che la successione è crescente. Si calcoli il limite della successione.

Esercizio 40.

a) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = 3$.
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = -\infty$.
c) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n tali che $\lim a_n = \lim b_n = \infty$ e $\lim a_n - b_n = \infty$.

Esercizio 41.

a) Sia a_n una successione convergente e sia $\lim a_n = \ell > 0$. Dimostrare che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

b) Dare un esempio di una successione a termini positivi con $\lim a_n = \infty$ e tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$.

Esercizio 42.

a) Siano a_n due successioni convergenti con $a_n \leqslant b_n$ per ogni n. Si dimostri che $\lim a_n \leqslant \lim b_n$;
b) Dare un esempio di due successioni a_n e b_n talli che $a_n < b_n$ per ogni n e $\lim a_n = \lim b_n$.

Esercizio 43.

a) Sia a_n una successione convergente (ovvero che ha limite finito). Dimostrare che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$.
b) Si dimostri che la successione a_n definita da

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

è tale che $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ ma $\lim a_n = \infty$.

Esercizio 44. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la monotonia e la convergenza della successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2; \\ a_0 = \alpha. \end{cases}$$

Esercizio 45. Sia a_n una successione con limite finito ℓ. Sia b_n la successione definita da

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Si dimostri che $\lim b_n = \ell$.

37. Verifica intermedia del 7 novembre 2012

Esercizio 46. Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 20a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 18. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 47. (Variante del primo esercizio) Sia a_n la successione definita per induzione nel modo seguente:

$$\begin{cases} a_{n+2} = 12a_{n+1} - 35a_n; \\ a_0 = 1; \\ a_1 = 9. \end{cases}$$

(a) Si determini una formula per il calcolo del termine ennesimo della successione;
(b) Si determini il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$.

Esercizio 48.

(a) Si dia un esempio di una successione a_n con termini diversi da zero tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim \frac{a_n}{n} = +\infty$;
(b) Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ si dimostri che $\lim a_n = 0$.

Esercizio 49. Sia a_n una successione a termini positivi tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = +\infty$. È sempre vero che esiste il limite (finito o infinito) della successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$?

38. Soluzioni degli esercizi della prova intermedia

Commento alle soluzioni. Il compito è stato pensato più come un test di autovalutazione (per questo vale solo 10 punti su 100) che come una valutazione che secondo me in questo mese dell'anno non ha ancora molto senso.

Queste sono alcune indicazioni che possono essere utili per l'autovalutazione.

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio non sta studiando a sufficienza o ha una preparazione di base che deve rafforzare;

(2) chi ha fatto il primo esercizio ma si è sentito perso nel resto del compito senza riuscire a fare altro, anche se sta studiando, in prospettiva deve capire le cose più a fondo e forse cambiare un poco il modo in cui studiare. Siamo all'inizio dell'anno e c'è tutto il tempo per farlo, però deve cercare di fare un qualche salto di qualità. A fine corso, una preparazione che permette di fare gli esercizi per la cui soluzione si è più o meno fornito un algoritmo risolutivo a lezione, senza una comprensione concettuale più profonda, potrebbe non essere sufficiente per passare l'esame.
(3) chi ha fatto il primo esercizio e il punto (a) del secondo esercizio, secondo me sta studiando e ha fondamentalmente capito anche le cose che abbiamo fatto. Deve forse solo entrare un po' di più in alcuni modi di ragionare e nel linguaggio che man mano si farà un po' più pesante. In altre parole direi deve fare attenzione un po' di più alla parte teorica cercando di capirne la struttura e le idee;
(4) chi ha fatto più di questo secondo me sta già studiando bene. Se non ha fatto tutto non mi preoccuperei, è solo mancata un poco di esperienza, ma piano piano sicuramente la svilupperà.

Naturalmente ci possono essere mille altre possibile combinazioni. Aldilà di come è andato il compito conta anche quanto vi sembra di essere lontani dalle soluzioni.

Soluzione esercizio 1 (prima versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 20b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 10$ e $\lambda_2 = 2$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,10^n + C\,2^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 18$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 10\,B + 2\,C = 18 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 10^n - 2^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 10^n - 2^n} = \sqrt[n]{10^n \left(2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n\right)} = 10\sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{2}{10}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione se una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 10$.

Soluzione esercizio 1 (seconda versione). Cerchiamo le successioni b_n non nulle della forma λ^n che risolvono la regola induttiva: $b_{n+2} = 12b_{n+1} - 35b_n$. Sostituendo troviamo $\lambda^{n+2} = 12\lambda^{n+1} - 20\lambda^n$ da cui $\lambda^2 - 12\lambda + 35 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = 5$. Ricordiamo, come abbiamo verificato a lezione, che se b_n e c_n risolvono la regola induttiva allora anche una successione della forma $Bb_n + Cc_n$ la risolve. Cerchiamo quindi a_n della forma $a_n = B\,7^n + C\,5^n$. Imponendo le condizioni $a_0 = 1$ e $a_1 = 9$ troviamo

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ 7\,B + 5\,C = 9 \end{cases}$$

da cui otteniamo $B = 2$ e $C = -1$. Quindi $a_n = 2 \cdot 7^n - 5^n$. Calcoliamo adesso il limite richiesto

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2 \cdot 7^n - 5^n} = \sqrt[n]{7^n \left(2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n\right)} = 7\sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n}.$$

Ora osserviamo che $\lim 2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2$, quindi $\lim \sqrt[n]{2 - \left(\frac{5}{7}\right)^n} = 1$, infatti, per quanto dimostrato a lezione su una successione ha limite finito e positivo la sua radice ennesima ha limite 1. Infine per la regola del prodotto otteniamo $\lim a_n = 7$.

Soluzione esercizio 2. La successione

$$a_n = n^2$$

ha le proprietá richieste nel punto (a).

Dimostriamo adesso l'affermazione del punto (b). Da $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ ricaviamo che esiste n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{1}{2} < \frac{1}{4}$ per $n \geqslant n_0$. Da questa equazione ricaviamo $0 < a_{n+1} < \frac{3}{4}a_n$ per $n \geqslant n_0$ e quindi per induzione

$$0 < a_n < a_{n_0}(\frac{3}{4})^{n-n_0}$$

per ogni $n \geqslant n_0$. Abbiamo cosí dimostrato che la successione a_n è definitivamente compresa tra due successioni che tendono a 0, quindi tende anche essa a 0.

Soluzione esercizio 3. Costruiamo una successione a_n tale che $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$ e per la quale non esiste il limite di $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Definiamo

$$a_n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari;} \\ (n+1)^{n+1} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare $a_n \geqslant n^n$ e quindi $\frac{a_n}{n!} > \frac{n^n}{n!}$ da cui $\lim \frac{a_n}{n!} = \infty$.

Inoltre

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{(n+2)^{n+2}}{n^n} > n^2 & \text{se } n \text{ é pari;} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

In particolare non esiste il limite della succesione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

39. Esercizi lunedì 12 novembre

Esercizio 50. Sia a_n la successione $(-1)^n n$. Calcolare il limite delle sottosuccesioni di a_n a_{2n} e a_{2n+1}.

Esercizio 51. Descrivere una successione che non ha limite e tale che le sottosuccessioni a_{3n} e a_{3n+1} hanno limite finito e diverso e la sottosuccessione a_{3n+2} ha limite infinito.

Esercizio 52. Sia a_n una successione. Supponiamo che a_n abbia una sottosuccessione $a_{k(n)}$ che ha limite 2 e una sottosuccessione $a_{h(n)}$ che ha limite 3. Dimostrare che a_n non ha limite.

Esercizio 53 (Gara di divergenza)**.** Usando (una sola volta) i simboli

$$! \; n \; 2$$

e parentesi a piacere, costruire la successione una successione che tende a infinito molto velocemente.

Esercizio 54. Siano a_n e b_n due successioni mai nulle tali che $\lim a_n = \lim b_n = 0$. Si può dire qualcosa del limite di

$$\frac{a_n b_n}{a_n^2 + b_n^2}?$$

Giustificare la risposta con una dimostrazione o con degli esempi?

40. Esercizi mercoledì 21 novembre

Esercizio 55. Sia a_n la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right); \\ a_0 = 12345. \end{cases}$$

Si dimostri che la successione è decrescente e se ne calcoli il limite.

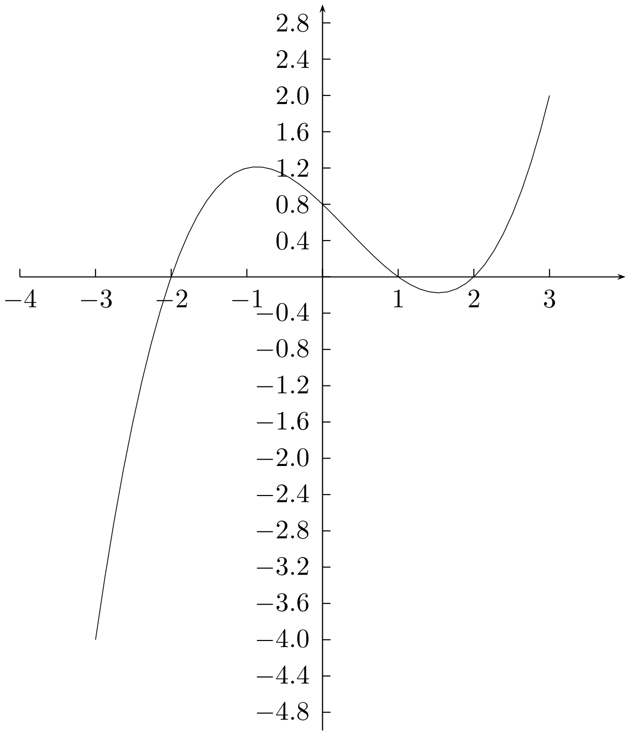
Esercizio 56. Si definisca una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$;
(2) $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 2$;
(3) f sia crescente nell'intervallo $[3, \infty)$ e decrescente nell'intervallo $(-\infty, 3]$

Esercizio 57. (1) Esplicitare la definizione di limite nel caso $x_0 = \infty$ e L finito o infinito.
(2) Esplicitare cosa vuol dire che non è vero che $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$

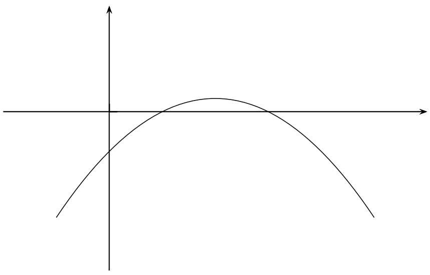
Esercizio 58. * Sia a_n una successione che non ha limite. Si dimostri che esiste una sottosuccessione di a_n con limite diverso da $+\infty$.

Esercizio 59. Sia $f : [-3, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione con il seguente grafico:



i) Qual'è l'immagine di f?
ii) Dire se f è iniettiva.
iii) Quanto vale $f(0)$?
iv) Per quali valori la funzione è zero?
v) Per quali valori la funzione è positiva?
vi) In quali intervalli la funzione è crescente e in quali decrescente?

Esercizio 60. Si consideri la seguente figura,



Di quale funzione potrebbe essere il grafico?

i) $f(x) = 3x + 2$;
ii) $f(x) = x^2 - 2x - \frac{3}{4}$;
iii) $f(x) = \frac{-x^2-2x-2}{5}$;
iv) $f(x) = \frac{-x^2+4x-3}{4}$;
v) $f(x) = -x^2 - 1$.

Esercizio 61. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definita fa

$$f(x) = \frac{4x+3}{x}.$$

Dimostrare che è decrescente e calcolarne l'immagine.

Esercizio 62. Sia $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A. Si dimostri che (se esiste) il limite $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ è unico. Cosa succederebbe se uno estendesse la definizione di limite al coaso in cui x tenda ad un punto che non è di accumulazione per A?

41. Esercizi mercoledì 28 novembre

Secondo me gli esercizi più facili e importanti, e che sarebbe bene riuscire a fare, sono l'1 (o almeno parte dell'1), il 2a, il 2b, il 2c. Sarebbe bene fare o perlomeno seriamente provare a fare dopo aver ripassato la lezione anche gli esercizi 3 e 4 che pure sono facili anche se un po' più teorici.

Esercizio 63. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\sin x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{|x|}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{|x+2|-|x|-2}{x} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+}\sqrt{\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2x} \qquad \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}-1}{\sin x-1}$$

[Se necessario si può fare uso del risultato dell'esercizio 68 che è una variante del corollario dimostrato in classe.]

Esercizio 64.
a) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$
b) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$
c) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$
d) Si dia un esempio di due funzioni $f,g:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\longrightarrow x_0} g(x)=\infty$ e non esiste $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Esercizio 65. Sia $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=L\in\mathbb{R}$. Sia $B=A\cup\{x_0\}$ e sia $g:B\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0;\\ L & \text{se } x=x_0.\end{cases}$$

Dimostrare che g è continua in x_0.

Esercizio 66. Dimostrare che se $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=\infty$ allora $\lim_{x\longrightarrow x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

Esercizio 67. Sia $sgn(x)$ la funzione definita nel modo seguente:

$$sgn(x)=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0\\ 0 & \text{se } x=0\\ -1 & \text{se } x<0\end{cases}$$

Calcolare $\lim_{x\longrightarrow 0}|sgn(x)|$. Dire se $|sgn(x)|$ è continua in 0.

Esercizio 68. Siano $A,B\subset\mathbb{R}$ e sia $f:A\longrightarrow B$ e $g:B\longrightarrow\mathbb{R}$. Sia $x_0\in A$. Sia $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=y_0$. Sia $y_0\notin B$ un punto di accumulazione di B e sia $\lim_{y\longrightarrow y_0} g(y)=L$. Allora

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} g\circ f(x)=g(\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x))=L.$$

Esercizio 69. Nell'esercizio precedente cosa può succedere se $y_0\in B$?

Esercizio 70. * Sia $A\subset\mathbb{R}$ e sia x_0 un suo punto di accumulazione. Sia $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Allora $\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x)=L$ se e solo se per ogni successione a_n a valori in $A\setminus\{x_0\}$ con $\lim a_n=x_0$ si ha $\lim f(a_n)=L$.

42. Esercizi, giovedì 6 dicembre

In prima battuta consiglio a tutti di fare qualche limite (diciamo uno per riga) poi l'esercizio 72, il 75 (soprattutto per chi non ha visto alle superiori il logaritmo), il 76, il 77 e il 78. Poi gli altri.

Esercizio 71. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (quelli della prima riga sono più semplici, in questo caso specificare bene i risultati necessari per giustificare la risposta, quelli della seconda riga sono più complicati, e si può essere più sintetici nella risposta, per la terza riga si ricordi che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\sin(e^x-e)\qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log x-4}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+}e^{\frac{1}{x}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+3}{e^{\frac{1}{x}}+1}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}+1}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^+}e^{\frac{1}{x}}\left(\sqrt{e^{2\frac{1}{x}}+1}-e^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{-x}-1}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3x}{1-e^{2x}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x^2}-1}{x}$$

Esercizio 72. Dare un esempio di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ e di una funzione $f:A\longrightarrow[0,1]$ bigettiva tale che l'inversa non sia una funzione continua.

Esercizio 73. Dimostrare le seguenti proprietà della funzione esponenziale partendo dalla definizione e dai risultati dimostrati in classe:

(1) $\exp(-x)=\frac{1}{\exp(x)}$;
(2) $\exp(\frac{p}{q})=\sqrt[q]{e^p}$ per $p,q\in\mathbb{Z}$ e $q\neq 0$;
(3) * $\exp x\geqslant 1+x$ per ogni x;
(4) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\exp(x)=+\infty$ (usare il punto precedente);
(5) $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\exp(x)=0$ (usare 1 e il punto precedente).

Esercizio 74. * Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ una funzione bigettiva e crescente (in particolare continua). Sia $f^{-1}:\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}$ l'inversa di f. Si dimostri che

$$\lim_{x\longrightarrow 0}f^{-1}(x)=-\infty\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow\infty}f^{-1}(x)=\infty.$$

Esercizio 75. Si dimostrino le seguenti proprietà della funzione logaritmo:

(1) $\log(1)=0$;
(2) $\log(e)=1$;
(3) $\log(x\cdot y)=\log x+\log y$;
(4) $\log(x^{-1})=-\log x$;
(5) $\log(x^n)=n\log x$;
(6) $\lim_{x\longrightarrow 0}\log(x)=-\infty$;
(7) $\lim_{x\longrightarrow\infty}\log(x)=\infty$;
(8) tracciare un grafico approssimativo della funzione logaritmo.

Per (6) e (7) usare l'esercizio precedente.

Esercizio 76. Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una funzione polinomiale di grado 7. Dimostrare che esiste x_0 tale che $f(x_0)=0$.

Esercizio 77. Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\longrightarrow\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$. Dire se è possibile definire una funzione $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continua tale che $f(x)=g(x)$ per ogni $x\neq 0$. (usare l'esercizio 65)

Esercizio 78. Sia $f(x)=x^3+e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x)=0$.

Esercizio 79. * Sia $f(x)=x^2+e^x$. Dire quanti sono gli x tali che $f(x)=2$.

43. Esercizi, mercoledì 12 dicembre 2012

Esercizio 80. Si calcolino i seguenti limiti (si ricordi anche che $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1$):

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{x^2+2x}-x\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+2(e^x+3)}-3}{x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}\qquad \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x-1}{\log x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{e^x\sin(e^{-x}\sin x)}{x}\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin^4(\frac{3x}{2})}{e^{x^4}-\sqrt{3x^4+1}}$$

Esercizio 81. In relazione alla funzione dell'esercizio 59, dire quali sono i punti di massimo, minimo, massimo locale e minimo locale. Dire inoltre quale è il massimo e il minimo di f.

Esercizio 82. Si consideri la successione definita per induzione da:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 8}; \\ a_0 = a \end{cases}$$

Si calcoli il limite della successione al variare di $a \in [2, \infty)$.

Esercizio 83. (1) Dare un esempio di una funzione continua definita su un intervallo limitato che non ha massimo.

(2) Dare un esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato che non ha massimo.

Esercizio 84. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

(sappiamo che questo è vero se facciamo il limite sugli interi, ridursi a quel caso considerando la parte intera di x).

Esercizio 85. * Dimostrare che per ogni intero k

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^x}{x^k} = \infty.$$

(procede come per l'esercizio precedente.)

Esercizio 86. Dare un esempio di una funzione $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua che assume valori positivi e negativi ma non il valore zero.

Esercizio 87. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà. A è limitato e ogni punto di accumulazione di A appartiene ad A. Sia $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dimostrare che f ammette massimo e minimo.

44. II compitino, 21 dicembre 2012

Esercizio 88. Si calcoli il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{e^x + 3} - 2}{x}.$$

Esercizio 89. Si consideri la seguente successione definita per induzione

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^2 - \frac{3}{2}a_n + \frac{3}{2}; \\ a_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Se ne calcoli il limite.

Esercizio 90. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Cosa vuol dire che $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$? (scrivere la definizione per esteso e stando attenti ai dettagli);
b) Dimostrare, usando solo la definizione, che se $\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 3$ allora $\lim_{x \longrightarrow 0} f(2 + x^2) = 3$;
c) Dare un esempio di due funzioni $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{y \longrightarrow 0} g(y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} g(f(x)) = 1.$$

Esercizio 91. Sia $f : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che esiste $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ e che tale limite è finito.

Soluzioni del II compitino

Commento alle soluzioni. Valgono piò o meno commenti simili all'altra volta:

(1) chi non è riuscito a fare il primo esercizio e il 3a) non sta studiando o sta studiando troppo poco;
(2) chi è riuscito a fare il 2a) ma non il 2b) deve studiare di più e con molta più attenzione la parte di teoria, il 2b) era un caso particolare di un teorema fatto a lezione in due forme diverse. Come indicazione generale i teoremi fatti a lezione uno si aspetta che li sappiate piuttosto bene;
(3) il secondo esercizio lo considero un esercizio medio, standard ma non facilissimo perché la strategia è più articolata rispetto, per esempio, al primo esercizio. Diciamo come parte facile mi sarei aspettato che trasparisse un minimo una strategia;
(4) dai risultati la mia impressione generale è che in linea di massima venga presa un poco sottogamba la parte più concettuale del corso, come, per esempio, non sapere definizione fondamentali come quella di limite.

Soluzione esercizio 1. Razionalizzando l'espressione otteniamo

$$\frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{(\sqrt{e^x+3}+2)}$$

Per x che tende a zero, sappiamo che il primo termine di questa espressione tende ad 1. Il numeratore del secondo termine tende ad 1 ed il denominatore, essendo la funzione esponenziale e la radice quadrata funzioni continue tende a $\sqrt{e^0+3}+2=4$. Quindi

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{e^x+3}-2}{x} = \frac{1}{4}.$$

Soluzione esercizio 2. Dimostriamo che la successione è decrescente e limitata. Studiamo quando $a_{n+1}<a_n$. Se indichiamo a_n con x otteniamo

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}<x \text{ ovvero } (x-1)(x-\frac{3}{2})<0$$

ovvero $x\in(1,\frac{3}{2})=I$. Quindi se $1<a_n<\frac{3}{2}$ allora $a_{n+1}<a_n$.

Dimostriamo per induzione che $a_n\in(1,\frac{3}{2})$ per ogni n. Per $n=1$ è vero. Per $n\geqslant 1$ supponiamo che $a_n\in(1,\frac{3}{2})$ e dimostriamo che $a_{n+1}\in(1,\frac{3}{2})$. Se indichiamo a_n con x otteniamo $1<x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$ ovvero

$$0<x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \text{ e } x^2-\frac{3}{2}x<0$$

la prima disequazione è equivalente a $x<\frac{1}{2}$ o $x>1$ e la seconda a $x\in(0,\frac{3}{2})$. Entrambe sono verificate per $x\in(1,\frac{3}{2})$.

Quindi esiste il limite della successione e lo indichiamo con ℓ. Inoltre essendo la successione decrescente e maggiore di 1 sappiamo che ℓ è maggiore o uguale a 1 e minore di $\frac{5}{4}$.

Facendo il limite a destra e sinistra dell'equazione $a_{n+1}=a_n^2-\frac{3}{2}a_n+\frac{3}{2}$ otteniamo $\ell=\ell^2-\frac{3}{2}\ell+\frac{3}{2}$ ovvero $\ell=1$ o $\ell=\frac{3}{2}$. Poiché il limite è minore o uguale a $\frac{5}{4}$ otteniamo $\ell=1$.

Soluzione esercizio 3. a) Sia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, allora il limite per x che tende a 2 della funzione $f(x)$ è uguale a 3 se e solo se (la risposta inizia qui) per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che se $x\neq 2$ e $|x-2|<\delta$ allora $|f(x)-3|<\varepsilon$.

b) Sia $\varepsilon>0$, allora dalla definizione di limite sappiamo che esiste $\delta>0$ tale che se $|y-2|<\delta$ e $y\neq 2$ allora $|f(y)-3|<\varepsilon$. Fissiamo un tale δ.

Scegliamo adesso $\gamma=\sqrt{\delta}$ allora $\gamma>0$ e per $|x|<\gamma$ abbiamo che $|x^2|<\delta$ quindi se poniamo $y=2+x^2$ abbiamo $|y-2|=|x^2|<\delta$. Inoltre se $x\neq 0$ abbiamo $y\neq 2$, quindi se $|x|<\gamma$ e $x\neq 0$ allora $|f(y)-3|<\varepsilon$.

Abbiamo quindi mostrato che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\gamma>0$ tale che se $|x|<\gamma$ e $x\neq 0$ allora $|f(2+x^2)-3|<\varepsilon$, ovvero che $\lim_{x\longrightarrow 0}f(2+x^2)=3$.

c) Sia $f(x)=0$ per ogni x e sia $g(x)$ definita da

$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{se } x=0;\\ 0 & \text{se } x\neq 0.\end{cases}$$

In particolare abbiamo che $g\circ f(x)=1$ per ogni x e quindi le due funzioni soddisfano le richieste.

Soluzione esercizio 4. Sia $B=\{f(x):x<0\}$. Si noti che tale insieme è limitato superiormente da $f(0)$ perché $f(x)<f(0)$ per ogni $x<0$ essendo la funzione crescente. Quindi $L=\sup B<\infty$. Dimostriamo che $\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)=L$.

Sia $\varepsilon>0$. Per definizione di estremo superiore esiste $b\in B$ tale che $b>L-\varepsilon$. Sia $b=f(x_1)$ con $x_1<0$. Poniamo $\delta=-x_1$, quindi $\delta>0$. Infine osserviamo che se $|x|<\delta$ e $x\neq 0$ e $x\in(0,\infty]$ allora abbiamo $x_1<x<0$, in particolare $f(x)\in B$, quindi

$$L-\varepsilon<f(x_1)<f(x)\leqslant L<L+\varepsilon$$

da cui $|f(x)-L|<\varepsilon$.

45. Esercizi 18 febbraio 2013

Esercizio 92. Cosa è un punto di accumulazione di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$.

Esercizio 93. Dare la definizione di funzione crescente, decrescente, non crescente, non decrescente.

Esercizio 94. Dare la definizione di punto di massimo e minimo e di punto di massimo e minimo locale.

Esercizio 95. Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si determini esplicitamente la successione (a_n) definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_{n+2} &= 2a_{n+1} + 3a_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \\ a_0 &= \alpha, \\ a_1 &= \beta. \end{cases}$$

Esercizio 96. Si dimostri che se $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ e se $g(x) \geqslant 1$ per ogni x allora $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)g(x) = \infty$.

Esercizio 97. Si dia la definzione di funzione convessa e sia dia un esempio di funzione convessa e di una funzione non convessa.

Esercizio 98. * Siano $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ numeri reali. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} = 0.$$

Esercizio 99. * Sia $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa. Si dimostri che f è continua.

Esercizio 100. Si dia un esempio di una funzione $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ convessa ma non continua.

46. Esercizi 4 marzo 2013

Esercizio 101. Calcolare l'inverso di $(1 + 2i)$ e di $(1 + i)$.

Esercizio 102. Calcolare le radici quarte di -16. Calcolare le radici ottave di -1.

Esercizio 103. Risolvere l'equazione $t^2 + 2t + 10 = 0$. Calcolare parte reale e parte immaginaria degli z tali che $z^2 = 5 + 12i$.

Esercizio 104. Determinare la successione x_n definita per induzione da

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 13x_{n-1} \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

Esercizio 105. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $z^4 = \bar{z}^3$.

Esercizio 106. Dato un numero naturale n, descrivere tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 1$ e tutti i numeri complessi z tali che $z^n = 2$.

Esercizio 107. Determinare tutti i numeri complessi z tali che

$$\frac{z - i}{z + i}$$

è un numero reale.

Esercizio 108. Determinare tutti i numeri complessi z tali che $e^z = e$.

Esercizio 109. Dimostrare che per ogni numero reale θ,

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Esercizio 110. * Siano a, b, c, d quattro numeri complessi. Il loro birapporto è definito come

$$bir(a, b, c, d) = \frac{a - c}{a - d} \cdot \frac{b - d}{b - c}.$$

Fissati tre punti distinti a, b, c nel piano complesso, non allineati, determinare gli z tali che $bir(a, b, c, z)$ è un numero reale.

Esercizio 111. * Sia a, b, c tre numeri complessi. Dimostrare che a, b, c sono i vertici di un triangolo equilatero se e solo se

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0.$$

47. Esercizi 11 marzo 2013

Esercizio 112. Risolvere le seguenti equazioni, dove $z \in \mathbb{C}$:

$$(z-\bar{z})^3 = i \qquad z^2 + (i-1)z - i = 0 \qquad z^3 = iz\bar{z}$$

Esercizio 113. Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$a(x) = x^{100} - x^{50} + 1 \qquad b(x) = \frac{x^1 0 - 5x^5 + 1}{3x^9 - 9x^3}$$

$$c(x) = \tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad d(x) = x\sin(x + \log x)$$

$$e(x) = e^{\cos^2 x} = e^{(\cos x)^2} \qquad f(x) = e^{\cos(x^2)}$$

$$g(x) = a^x \qquad h(x) = x^a$$

$$k(x) = x^x \qquad \ell(x) = \log(\sin(\cos x))$$

Esercizio 114. Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \log|x|$. Si dimostri che

$$Df(x) = \frac{1}{x}$$

Esercizio 115. Si dimostri che la funzione $|x|$ non è derivabile in 0.

Esercizio 116. Si calcoli la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \neq 0$.

Esercizio 117. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. f è una funzione derivabile e bigettiva. In quali punti la funzione inversa $g(x) = \sqrt[3]{(x)}$ è derivabile? Quanto vale la sua derivata?

48. Esercizi 18 marzo 2013

Esercizio 118. 1) Calcolare $(1-i)^{24}$. 2) Risolvere $z^3 = arg\,(z) + \frac{\pi}{6}$ e $z|z| = 2\,Re\,(z)$.

Esercizio 119. Si studino le seguenti funzioni

(1) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
(2) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$;
(3) $h(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$;
(4) $k(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$;
(5) $\ell(x) = \left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Esercizio 120. Determinare, se esistono, massimo e minimo delle funzioni

(1) $f(x) = \log x - \log^2 x$,
(2) $g(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right)$.

Esercizio 121. Si consideri la funzione $f : [0,2] \longrightarrow [1,5]$. definita da $f(x) = x^2 + 1$. Si dimostri che è invertibile e si calcoli $Df^{-1}(2)$.

Esercizio 122. Sia $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 123. Sia $f : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \cos x$. Trovare il massimo e il minimo di f

Esercizio 124. Sia $m \in \mathbb{R}$. Determinare per quali $q \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$e^x = mx + q$$

ha nessuna, una o due soluzioni.

Esercizio 125. Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$. Dimostrare che $f(b) \neq f(a)$.

Esercizio 126. sia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $c \in (a,b)$ e sia f derivabile in ogni $x \neq c$. Supponiamo che esista finito $\ell = \lim_{x \longrightarrow c} f'(x)$. Allora f è deriviabile in c e $f'(c) = \ell$.

Esercizio 127. * Dare un esempio di due funzioni continue f, g e derivabili su un intervallo chiuso $[a,b]$ tali che $g(b) \neq g(a)$ e per le quali non esiste c interno all'intervallo tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

49. Esercizi, lunedì 25 marzo 2013

Esercizio 128. Dimostrare che per ogni $x > 0$ risulta $xe^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$.

Esercizio 129. Calcolare i seguenti limiti usando la regola di de l'Hopital o l'approssimazione delle funzioni con i polinomi di Taylor.

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\sin x^2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{(\sin x)^2} \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

Esercizio 130. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$a(x) = (\sin x)^2 \qquad b(x) = \sin x^2$$

$$c(x) = \tan x \qquad d(x) = 3^{x+1}$$

Esercizio 131. Determinare un numero reale α tale che

$$\tan(x^3) - (\tan x)^3 = \alpha x^5 + o(x^5).$$

Esercizio 132. Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0; \\ (\sin x)^3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dire quante volte la funzione è derivabile.

Esercizio 133. * Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0; \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dimostrare che f è derivabile infinite volte e che tutte le sue derivate in 0 si annullano.

50. Esercizi, giovedì 28 marzo 2013

Esercizio 134. Dimostrare che esiste un unico reale x_0 per il quale si annulla la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x.$$

Esercizio 135. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 nel punto $x_0 = 0$ delle seguenti funzioni:

$$e(x) = x(\sin x)^2 \tan x \qquad f(x) = \sin x \log(1+x)$$

$$g(x) = \log(1-x^2) \qquad h(x) = \log(1-x^2)$$

Esercizio 136. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}\right) \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 4x^2 - 4}{x^4}$$

Esercizio 137. Determinare un numero reale α tale che

$$(\arctan x)^5 - 2(\sin x)^5 + x^5 = \alpha x^9 + o(x^9)$$

Esercizio 138. Dare un esempio di una funzione definita su tutto $\mathbb{R}$ che sia derivabile due volte ma non tre.

Esercizio 139. Siano f, g due funzioni definite in un intorno di 0 Dimostrare le seguenti affermazioni

(1) se $f = o(g)$ e $g = o(h)$ allora $f = o(h)$;
(2) se $g\, o(f) = o(fg)$.

51. Compitino 4 aprile 2013

Esercizio 140. Sia $z = 3 + 4i$ si calcolino $|z|$, z^{-1} e $\bar{z}$.

Esercizio 141. Sia data la funzione:

$$g(x) = \frac{\log(1+x) - x}{x^2}$$

Si descriva il dominio di definizione di g e si dica se g si possa estendere in modo continuo agli estremi del dominio di definizione. In caso tale estensione esista si dica inoltre se l'estensione è derivabile.

Esercizio 142. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Dare la definizione di "f è derivabile in 0".
b) Si supponga che f sia derivabile in 0 e si supponga che 0 sia un punto di massimo. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

Esercizio 143. Si consideri la funzione $f(x) = e^x - 3x^2$ e sia $g(x)$ la sua derivata.

a) Mostrare che la funzione $g(x)$ ha esattamente due zeri.
b) Quanti zeri ha la funzione $f(x)$?

Esercizio 144. Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in ogni punto. Si supponga che $f'(x) = 2$ per ogni x e che $f(0) = 0$. Si dimostri che $f(x) = 2x$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1. $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
$\bar{z} = 3 - 4i$.
$z^{-1} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$.

Soluzione esercizio 2. L'espressione che definisce g è definita per $x \neq 0$ e $1 + x > 0$. Quindi

$$Dominio(g) = (-1, \infty) \setminus \{0\}.$$

Per x che tende a -1 abbiamo che $1 + x$ tende a zero e quindi $\log(1 + x)$ tende a $-\infty$ mentre $-x$ e x^2 tendono a 1. Quindi $g(x)$ tende a $-\infty$. In particolare la funzione g non si può estendere con continuità in -1.

Per studiare il limite di g per x che tende a zero utilizziamo l'approssimazione di $\log(1 + x)$ mediante i polinomi di Taylor. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

In particolare la funzione si può estendere con continuità in 0 ponendo $g(0) = \frac{1}{2}$. La funzione è derivabile per $x \neq 0$. Per studiare derivabilità dell'estensione in zero calcoliamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - \frac{1}{2}}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

Per calcolare questo limite usiamo di nuovo l'approssimazione di $\log(1 + x)$ questa volta con il polinomio di Taylor di terzo grado. Abbiamo

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui per il limite del rapporto incrementale otteniamo

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Quindi la funzione è derivabile

Soluzione esercizio 3. a) La funzione f è derivabile in 0 se esiste finito il limite del rapporto incrementale
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$
b) Sia 0 un punto di massimo per la funzione f quindi $f(x)\geqslant f(0)$ per ogni x ovvero $f(x)-f(0)\geqslant 0$ per ogni x. Poiché la funzione è derivabile in zero esiste il rapporto incrementale e abbiamo che
$$f'(0)=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$
Da $f(x)-f(0)\geqslant 0$ per $x<0$ otteniamo
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant 0 \text{ da cui } f'(0)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\leqslant 0.$$
Similmente per $x>0$ otteniamo
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}\geqslant 0 \text{ da cui } f'(0)=\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\geqslant 0.$$
Quindi $f'(0)=0$.

Soluzione esercizio 4. a) Derivando f otteniamo $g(x)=e^x-6x$. Per calcolarne il numero di zeri studiamo dove la funzione è crescente e dove è decrescente. Calcolando $g'(x)$ otteniamo e^x-6 quindi $g'(x)>0$ se e solo se $x>\log 6$ e $g'(x)<0$ se e solo se $x<\log 6$. Da questo deduciamo che la funzione è decrescente in $(-\infty,\log 6]$ e crescente in $[\log 6,\infty)$. In particolare la funzione può avere al massimo due zeri. Inoltre osserviamo che $g(0)=1>0$, che $\lim_{x\longrightarrow\infty} g(x)=\infty$ e che $g(\log 6)=6-6\log 6<0$. Quindi per il teorema di Bolzano g ha esattamente due zeri che indichiamo con x_1 e x_2.

b) Dallo studio precedente ricaviamo che $f(x)$ è crescente nell'intervallo $(-\infty,x_1]$ e nell'intervallo $[x_2,\infty)$ e che è decrescente nell'intervallo $[x_1,x_2]$. Quindi al massimo f ha tre zeri. Osserviamo inoltre che
$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)=\infty.$$
Inoltre $f(0)=1>0$ e $f(1)=e-3<0$. Quindi per il teorema di Bolzano f ha esattamente tre zeri.

Soluzione esercizio 5. Sia x un punto diverso da zero. Per il teorema di Lagrange esiste y compreso tra 0 e x tale che
$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(y)=2.$$
Quindi, usando $f(0)=0$, otteniamo $\frac{f(x)}{x}=2$ da cui $f(x)=2x$.

52. Esercizi, lunedì 29 aprile 2013

Esercizio 145. Sia $a\neq 0$. Calcolare la primitiva di $\frac{1}{(ax+b)^m}$. [porre $y=ax+b$]

Esercizio 146. Calcolare
$$\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx$$
[scrivere $\frac{1}{x^2-1}$ nella forma $\frac{1}{ax+b}+\frac{1}{cx+d}$]

Esercizio 147. Calcolare
$$\int_2^3\frac{3x^2}{x-1}dx.$$
[Scrivere $3x^2$ nella forma $(ax+b)(x-1)+c$]

Esercizio 148. Sia $I_n=\int_0^x\frac{1}{(1+t^2)^n}dt$. Integrando per parti trovare una formula che metta in relazione I_n e I_{n+1}.

Esercizio 149. Usando il risultato dell'esercizio precedente scrivere la primitiva di $\frac{1}{(x^2+1)^2}$.

Esercizio 150. Stimare $\sin 1$ con un errore massimo di $0,01$.

Esercizio 151. Calcolare
$$\int_0^1\frac{x^3}{x^8+1}dx$$
[$y=x^4$]

Esercizio 152. Per quali valori di α è definito $\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx$.

53. Esercizi 6 maggio 2013

Esercizio 153. Si calcolino i seguenti integrali
$$a)\ \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx \qquad b)\ \int_0^1 x^3\sqrt{2-x^2}\,dx$$

Esercizio 154. Si calcolino le primitive delle seguenti funzioni:

$a) e^{e^x+x}$ $\qquad [y=e^x...]$

$b) \dfrac{1}{e^{2x}-2e^x}$

$c) \sin(\sqrt{x})$ $\qquad [y=\sqrt{x}...]$

$d) \dfrac{\sin 2x+\cos x}{1+\sin x}$ $\qquad [y=\sin x\, ricordarsi\ \sin 2x=2\sin x\cos x]$

$e) \dfrac{1}{x(x-1)}$

$f) \dfrac{1}{x^2(1+x)}$

$g) \dfrac{x+3}{x^3+3x^2+2x}$

$h) \dfrac{x^2-3}{(x+1)(x-1)^2}$

$i) \dfrac{1}{x^3(1+x)^2}$

$j) \dfrac{1}{x^2-2x+2}$

$k) \dfrac{1}{x^4-1}$

$l) x^5e^{-x^3}$

Esercizio 155. Discutere la convergenza delle seguenti serie:
$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n^2} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}} \qquad e)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cdots+n}{n^3}$$

Esercizio 156. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche (o quasi)
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n^2(n+1)^2}$$

Esercizio 157. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$ converge.

Esercizio 158. Dire per quali x la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}$ converge.

Esercizio 159. Discutere la convergenza delle seguenti serie
$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right) \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{ne^{-n}}$$
$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n!}{n^3}$$

Esercizio 160. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$a) \int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,dx \qquad b) \int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \qquad c) \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(2x+1)}\,dx$$

Esercizio 161. Dire per quali valori di a, b il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a(4x+9)^b}\,dx.$$

Esercizio 162. Dire se i seguenti integrali impropri convergono:

$$a) \int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,dx \qquad b) \int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x}}{\sin x}\,dx \qquad c) \int_\infty^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\,dx$$

Esercizio 163. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^a}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

Esercizio 164. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_a^\infty \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,dx$$

Esercizio 165. Sia F la funzione definita nel seguente modo:

$$F(x) = \int_0^x (1+e^{-t^2})(4-t^2)dt$$

Si calcoli la derivata di F. Si determino gli intervalli in cui F é crescente o decrescente. Si determini il numero degli zeri di F.

Esercizio 166. Sia F la funzione definita nel seguente modo:

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^t dt$$

Si determini la derivata di F.

Esercizio 167. Dire per quali valori di a il seguente integrale improprio converge

$$\int_0^\infty t^a e^{-t}\,dt$$

Esercizio 168. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta delle seguenti serie:

$$a) \sum_{n=2}^\infty \log(1+\frac{(-1)^n}{n}) \qquad b) \sum_{n=2}^\infty \sin(\frac{(-1)^n}{\log n})$$

$$c) \sum_{n=2}^\infty \frac{(-1)^n}{n-\log n}) \qquad d) \sum_{n=2}^\infty (\frac{\pi}{2}-\arctan n)$$

$$e) \sum_{n=1}^\infty (\log(1+n)-\log n-\frac{1}{n}) \qquad f) \sum_{n=1}^\infty (e-(1+\frac{1}{n})^n)$$

Per il punto a) e b) e c) usare il criterio di Leibniz (per il punto a) per dimostrare che la successione a termini positivi associata è decrescente separare il caso n pari da n dispari, per il punto c) studiare la funzione $f(x) = x - \log x$). Per il punto d) dimostrare che $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio 169. Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

$$a) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n2^n}x^n \qquad b) \sum_{n=1}^\infty \frac{3^n}{n^2}x^n \qquad c) \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}x^n$$

$$d) \sum_{n=1}^\infty (1+(-2)^n)x^n \qquad e) \sum_{n=1}^\infty \frac{n-1}{n+1}x^n \qquad f) \sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}}x^n$$

Esercizio 170. Stimare $\log\frac{3}{2}$ con un errore inferiore a $0,1$.

Esercizio 171. Calcolare la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^3\frac{1}{3^n}$. [usare le derivate...]

55. Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, IV compitino, 29 maggio 2013

Scrivere nome, cognome e matricola in bella grafia su tutti i fogli che vi sono stati consegnati.

Esercizio 172. Si dica se il seguente integrale improprio è convergente

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin x}dx.$$

Esercizio 173. a) Dare la definizione di serie convergente.

b) Sia a_n una successione a termini positivi e sia $a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$ per ogni n. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Esercizio 174. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(1+(\log x)^2)}.$$

Esercizio 175. Si dica per quali x la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+n)x^n.$$

Esercizio 176. Sia $F(x)$ la funzione definita da $F(x) = \int_0^x \sin(t+t^2)\,dt$. Si calcoli

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{F(x)}{x^2}.$$

56. Soluzioni

Esercizio 1. Osserviamo che nell'intervallo $(0,1]$ la funzione $\sin x$ è continua e strettamente positiva, quindi lo è anche la funzione $1/\sin(x)$. Per determinare la convergenza dell'integrale la confrontiamo con la funzione $1/x$.

Osserviamo che

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1/x}{1/\sin x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

quindi la convergenza dell'integrale proposto nell'esercizio è equivalente a quella dell'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ che sappiamo non convergere.

Esercizio 2. a) Sia a_n una successione di numeri reali e sia S_n la successione delle somme parziali di a_n:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Si dice che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se esiste finito il limite della successione S_n.

b) Osserviamo che abbiamo $a_n \leqslant \frac{a_0}{2^n}$ per ogni n. Infatti ragionando per induzione otteniamo che per $n=0$ questa affermazione é vera e se é vera per n allora

$$a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n \leqslant \frac{1}{2}\frac{a_0}{2^n} = \frac{a_0}{2^{n+1}}$$

e quindi é vera anche per $n+1$. Poiché la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{2^n}$ é convergente, per il criterio del confronto, otteniamo che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente.

Esercizio 3. Poniamo $y = \log x$, abbiamo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ da cui

$$\int \frac{1}{x(1+(\log x)^2)}dx = \int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan(y) = \arctan(\log x).$$

Esercizio 4. Si tratta di una serie di potenze. Calcoliamo inanzittutto il raggio di convergenza. Per determinare il raggio di convergeza basta studiare il caso in cui $x > 0$. In questo caso si tratta di una serie a termini positivi. Calcoliamo il limite del rapporto di due termini successivi. Otteniamo

$$\lim \frac{(2^{n+1} + n + 1)x^{n+1}}{(2^n + n)x^n} = \lim \frac{2 + \frac{n+1}{2^n}}{1 + \frac{n}{2^n}} x = 2x$$

Applicando il criterio del rapporto otteniamo che la serie converge per $0 \leqslant x < 1/2$ e diverge per $x > 1/2$. Quindi il raggio di convergenza è $1/2$. Inoltre per $x = \pm 1/2$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n (1 + \frac{n}{2^n})$$

il cui termine generale non tende a zero, quindi non è convergente.

Quindi la serie è convergente per $|x| < 1/2$ e non convergente altrimenti.

Esercizio 5. Osserviamo che F è derivabile e che abbiamo $DF(x) = \sin(x + x^2)$. Inoltre $D^2F(x) = (1 + 2x)\cos(x + x^2)$. Quindi il polinomio di Taylor di secondo grado calcolato per $x = 0$ è il polinomio $P(x) = F(0) + DF(0)x + \frac{D^2F(0)}{2}x^2 = \frac{x^2}{2}$ e quindi abbiamo $F(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Abbiamo quindi che $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{F(x)}{x^2} = 1/2$.

57. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto del 3 giugno 2013

Esercizio 1. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1}\, dx.$$

Esercizio 2. Determinare i punti di massimo e i punti di minimo della funzione $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da: da:

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{2}}$$

Esercizio 3. Studiare la convergenza e la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1 + \frac{1}{n}).$$

Esercizio 4. Siano $F(x)$ e $G(x)$ le funzioni definite nel modo seguente:

$$F(x) = \int_1^x e^{t^2}\, dt \qquad \text{e} \qquad G(x) = \int_0^x F(t)\, dt$$

[si noti che l'integrale con il quale è definita F è da 1 a x e non da 0 a x.]

(1) quanti zeri ha la funzione F?
(2) quanti zeri ha la funzione G?

58. Compito di Analisi Matematica, corso A, anno 2012-2013, scritto dell' 1 luglio 2013

Esercizio 1. Si dica se il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x}\, dx.$$

Esercizio 2. Dire per quali x la seguente serie converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n^3 + 3} x^n.$$

Esercizio 3.

(1) Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Cosa vuol dire che g è continua in 1 (dare la definizione).
(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arctan x - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Dire quanti zeri ha la funzione f.

Esercizio 4. Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right).$$

Determinare il dominio di definizione di f e dire se la funzione si può estendere con continuità agli estremi del dominio di definizione.

Si determinino inoltre i punti nei quali f è derivabile.