# Analisi Matematica B - Compito dell'11 giugno 2012

## Testi e soluzioni

**Esercizio 1.**

(a) Determinare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$2z^2 - 3iz + 2 = 0.$$

(b) Determinare tutte le coppie di numeri complessi $a$, $b$ tali che la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} z_n = \frac{3}{2} i z_{n-1} - z_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \\ z_0 = a \\ z_1 = b \end{cases}$$

sia infinitesima.

**Soluzione.** (a) Si tratta di un'equazione di secondo grado, il cui discriminante è

$$\Delta = (-3i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -9 - 16 = -25.$$

Le radici quadrate di $-25$ sono $5i$ e $-5i$, dunque le soluzioni dell'equazione proposta sono

$$u = \frac{3i + 5i}{4} = 2i, \qquad v = \frac{3i - 5i}{4} = -\frac{i}{2}.$$

(b) La successione $z_n = z^n$ soddisfa la legge ricorsiva se e solamente se il numero complesso $z$ risolve l'equazione

$$z^2 = \frac{3}{2} i z - 1,$$

che è equivalente all'equazione del punto (a). Quindi l'insieme delle soluzioni della ricorrenza

$$z_n = \frac{3}{2} i z_{n-1} - z_{n-2}$$

è dato dalle successioni della forma

$$z_n = \alpha u^n + \beta v^n = \alpha (2i)^n + \beta \Big(-\frac{i}{2}\Big)^n,$$

al variare di $\alpha$ e $\beta$ in $\mathbb{C}$. Dato che

$$|(2i)^n| = |2i|^n = 2^n \to +\infty, \qquad \left|\Big(-\frac{i}{2}\Big)^n\right| = \left|-\frac{i}{2}\right|^n = \frac{1}{2^n} \to 0,$$

la successione $(z_n)$ è infinitesima se e solamente se $\alpha = 0$. Poiché

$$a = z_0 = \alpha + \beta, \qquad b = z_1 = 2i\alpha - \frac{i}{2}\beta,$$

ciò accade se e solamente se

$$a = \beta \qquad \text{e} \qquad b = -\frac{i}{2}\beta,$$

ossia se e solamente se i numeri complessi $a$ e $b$ sono legati dall'equazione lineare

$$a = 2ib.$$

**Esercizio 2.**

(a) Determinare il numero delle soluzioni $x > 0$ dell'equazione

$$\frac{1}{x} + 3\log x = 0.$$

(b) Mostrare che la funzione

$$g : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = e^{3x}\log x,$$

ha esattamente un punto di massimo locale $a$ ed un punto di minimo locale $b$ e determinare il segno di $g(a)$ e di $g(b)$.

**Soluzione.** (a) Sia $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + 3\log x.$$

La sua derivata è

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} = \frac{3x - 1}{x^2}, \qquad \forall x > 0,$$

ed è negativa su $]0, 1/3[$ e positiva su $]1/3, +\infty[$. Quindi $f$ è strettamente decrescente su $]0, 1/3]$ e strettamente crescente su $[1/3, +\infty[$. Dato che

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \qquad f(1/3) = 3(1 - \log 3) < 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

per il teorema degli zeri e per la stretta monotonia concludiamo che $f$ ha esattamente due zeri, uno in $]0, 1/3[$ e l'altro in $]1/3, +\infty[$. Quindi l'equazione proposta ha esattamente due soluzioni.

(b) La derivata di $g$ vale

$$g'(x) = 3e^{3x}\log x + e^{3x}\frac{1}{x} = e^{3x}\left(3\log x + \frac{1}{x}\right) = e^{3x}f(x).$$

Per quanto visto nel punto (a), questa derivata si annulla in esattamente due punti $a < b$ ed è positiva su $]0, a[\cup]b, +\infty[$ e negativa su $]a, b[$. Quindi $a$ è un punto di massimo locale, mentre $b$ è un punto di minimo locale. Dato che $f(1) = 1 > 0$, lo studio di $f$ del punto (a) mostra che $b < 1$. Poiché $g < 0$ su $]0, 1[$, concludiamo che sia $g(a)$ che $g(b)$ sono negativi.

**Esercizio 3.**

(a) Determinare una primitiva della funzione

$$f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} 2^{-\sqrt{x}}.$$

(b) Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

converge e che la sua somma $S$ soddisfa le disuguaglianze

$$\frac{1}{\log 2} \leq S \leq \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{2}.$$

**Soluzione.** (a) Possiamo riscrivere $f$ come

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-(\log 2)\sqrt{x}}.$$

Dato che

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-(\log 2)\sqrt{x}}\right) = -\log 2 \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-(\log 2)\sqrt{x}},$$

deduciamo che la funzione

$$F(x) = -\frac{2}{\log 2} e^{-(\log 2)\sqrt{x}} = -\frac{2}{\log 2} 2^{-\sqrt{x}}$$

è una primitiva di $f$.

(b) La serie data è

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n),$$

dove $f$ è la funzione del punto (a). Questa funzione è decrescente, essendo il prodotto di due funzioni decrescenti. Quindi possiamo mettere in relazione le somme parziali della serie con le somme di Riemann superiori ed inferiori di $f$ relative alla suddivisione $p_m = \{1, 2, \dots, m\}$ dell'intervallo $[1, m]$. Precisamente, si ha:

$$\sum_{n=1}^{m} f(n) = \sum_{n=1}^{m} \sup_{[n,n+1]} f = S(f, p_{m+1}) \geq \int_1^{m+1} f(x)\, dx = F(m+1) - F(1),$$

e

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} f(n) &= f(1) + \sum_{n=2}^{m} f(n) = f(1) + \sum_{n=2}^{m} \inf_{[n-1,n]} f \\
&= f(1) + s(f, p_m) \leq f(1) + \int_1^m f(x)\, dx = f(1) + F(m) - F(1).
\end{aligned}
$$

Dato che

$$
f(1) = \frac{1}{2}, \qquad \text{e} \qquad F(1) = -\frac{1}{\log 2},
$$

si ottiene

$$
F(m+1) + \frac{1}{\log 2} \leq \sum_{n=1}^{m} f(n) \leq \frac{1}{2} + F(m) + \frac{1}{\log 2}.
$$

Passando al limite per $m \to \infty$, essendo $F(m)$ infinitesimo, concludiamo che la serie converge e che

$$
\frac{1}{\log 2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\log 2},
$$

come volevasi dimostrare.