

Esercizi 24.11.2011

1) Determinare la parte reale e la parte immaginaria dei numeri complessi

$$3\sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad 2e^{2\pi/3 i}, \quad 4e^{-\frac{2\pi}{3} i}$$

2) Siano  $u_1, u_2, \dots, u_m$  le radici  $m$ -esime di 1. Sia  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  e sia  $w$  una radice  $m$ -esima di  $z$ . Dimostrare che

$$u_1 w, u_2 w, \dots, u_m w$$

sono tutte e sole le radici  $m$ -esime di  $z$ .

3) Determinare le radici seste di  $-1$ , esplicitando le loro parti reali e immaginarie.

4) Calcolare le radici quadrate di  $5 + 12i$ .

5) Risolvere le seguenti equazioni, dove  $z \in \mathbb{C}$ :

$$(z - \bar{z})^3 = i, \quad z^2 + (i-1)z - i = 0$$

$$z^4 = \bar{z}^3, \quad z^3 = i z \bar{z}, \quad (z+1)^4 - (z-1)^4 = 0$$

6) a) Dimostrare che  $\lim_{m \rightarrow \infty} m \sin \frac{\pi}{m} = \pi$

b) Determinare il perimetro del poligono regolare con  $m$  lati inscritto nella circonferenza unitaria

c) Dimostrare che  $\cos \frac{\pi}{2^m} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$  e

$$\sin \frac{\pi}{2^m} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}, \quad \text{dove sotto radice}$$

il 2 compare  $m-1$  volte.

d) Dimostrare che

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}$$

dove sotto radice il 2 compare  $n$  volte.

7) a) Dimostrare che 3 numeri complessi  $x, y, z$  sono vertici di un triangolo equilatero se e solamente se

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$$

b) Tre punti  $A, B, C$  si muovono di moto rettilineo uniforme nel piano. All'istante  $t=0$  le posizioni sono

$$A = (0, 0), \quad B = (0, 1), \quad C = (1, 0),$$

e all'istante  $t=1$

$$A = (1, 1), \quad B = (2, 1), \quad C = (1, 2)$$

Per quali valori di  $t$  i punti  $A, B, C$  sono i vertici di un triangolo equilatero?