Esercizi 10.11.2011

1) Determinare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+10x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}+3}{e^{1/x}+1},$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to 0+} x^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{3x+2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1-e^{2x}}, \quad \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{2x}$$

2) Determinare il numero $a \in \mathbb{R}$ per cui la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ a & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

risulti continua.

3) Dimostrare che la funzione $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ a $]-1,1[$ e determinarne l'inversa.

4) Sia $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ un polinomio di grado m pari tale che $a_0 < 0$ e $a_m > 0$. Mostrare che p ha almeno una radice positiva ed una negativa.
Esibire esempi con m pari qualsiasi, $a_0 < 0$ e $a_m > 0$ in cui vi sia esattamente una radice positiva ed una negativa.

5) Si disegni un grafico approssimativo della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

6) Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione

$$e^x + x^2 = 2$$

7) Dimostrare la formula

$$\log n! = n \log n - n + o(n) \quad \text{per } n \to \infty$$

8) Sia $X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ Una funzione random $f : X_n \to X_n$ è costruita nel seguente modo: f manda ciascun $k \in X_n$ in uno degli n elementi di X_n in modo equiprobabile.
Se n è molto grande:

a) Quanto è probabile che una funzione random sia una permutazione ?

b) Quanto è probabile che in un insieme di n, oppure 2^n, oppure 3^n funzioni random vi sia almeno una permutazione ?