Esercizi 13.10.2011

1) Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la monotonia e la convergenza della successione definita da

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 \\ u_0 = \alpha \end{cases}$$

2) Si determini, se esiste, il seguente

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$$

3) Sia $0 < \alpha < 1$ e si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

a) Si mostri che $a_n \leq \alpha$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e che (a_n) è decrescente

b) Si determini il limite di (a_n)

4) Si determini, se esiste, il limite della successione definita da

$$\begin{cases} r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n} \\ r_0 = 1 \end{cases}$$

5) Determinare esplicitamente la successione definita da

$$\begin{cases} x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1} \\ x_0 = 4 \\ x_1 = 3 \end{cases}$$

6) Determinare esplicitamente la successione definita da

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6u_n - 9u_{n-1} \\ u_0 = -1 \\ u_1 = 3 \end{cases}$$

7) Determinare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x}\right), \qquad \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x), \text{ dove } f:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x)=\sqrt{\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{4x^2}}-\frac{1}{2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{|2+x|-|x|-2}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right), \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\sqrt{x^2+2}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$$

8) Dimostrare che se $a_n \to A$, allora

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = A.$$