6.10.2011

Esercizi

1) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-6n^4}{1+n^2+n^4} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+2}{(-1)^{n+1}-2} \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{n^2 3^n} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{2n} n^3} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \text{ con } a>0$$

2) Dimostrare che se $a_n \to a > 0$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to 1$

3) Determinare, se esiste, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^n+n^2}{2^n+n^3}}$

4) Determinare, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\dots+\frac{1}{(2n)^2}\right) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

5) Siano (a_n) e (b_n) due successioni convergenti tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Mostrare un esempio dove $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, ma i due limiti coincidono.

6) Sia (a_n) una successione di numeri positivi. Dimostrare che se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to L \in [0,+\infty]$, allora $\sqrt[n]{a_n} \to L$. Mostrare con un esempio che non vale l'implicazione opposta.