Esercizi 29.9.2011

1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo dei seguenti insiemi:

$A = \{ (-\frac{1}{2})^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$B = \{ \frac{2n+1}{n-1} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \}$

$C = \{ (-1)^n n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$D = \{ \sqrt{n^2+1} - n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$E = \{ n + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \}$

$F = \{ \frac{m}{10^n} \mid m \in \{0,1,2,\dots,8\},\ n \in \mathbb{N} \}$

2) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore e, se esistono, il massimo e il minimo dell'insieme

$$A = \{ a + b \mid a > 0,\ b > 0,\ ab = 1 \}$$

3) Trovare una formula compatta per le seguenti somme:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k x^{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{n} (2k-1), \quad \sum_{h=k}^{n} x^h \qquad \text{dove} \quad 0 \leq k \leq n$$

4) Dimostrare le seguenti identità:

$$\sum_{h=1}^{n} h^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{h=1}^{n} h^3 = \left(\sum_{h=1}^{n} h \right)^2$$

$$\sum_{h=1}^{n} (2h-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$$

5) Verificare che se $a \in]0,1[$, tutti i termini della successione

$$x_0 = a, \quad x_{n+1} = x_n - x_n^3$$

appartengono a $]0,1[$.

6) Sia $x \geq 1$. Utilizzando la disuguaglianza di Bernoulli, mostrare che
$$\sqrt[n]{x} - 1 \leq \frac{x-1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$$

7) Mostrare che un quadrato può essere suddiviso in 4, 6, 8 e 9 quadrati più piccoli. Per quali altri numeri è possibile?

8) La misurazione di una certa grandezza è stata ripetuta n volte ed ha prodotto come risultato gli n numeri reali $x_1, \dots, x_n$. Si ritiene che il valore plausibile per la grandezza in questione sia il numero x che minimizza lo scarto quadratico da $x_1, \dots, x_n$, ossia il punto di minimo della funzione $Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$Q(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2$$

a) Si dimostri che se $\bar{x}$ è la media aritmetica di $x_1, \dots, x_n$ allora
$$\sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} (\bar{x} - x_j)^2 + n\,(x - \bar{x})^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Si determini il punto di minimo della funzione Q, ossia il valore plausibile della grandezza considerata.

9) Quale relazione c'è tra il numero $\sup A \cap B$ e la coppia di numeri $\sup A$, $\sup B$?