

○ Esercizi 5.3.2012

Es 1 Calcolare, fino al termine x^5 incluso, gli sviluppi delle seguenti funzioni per $x \rightarrow 0$:

$$a(x) = \sin^2 x, \quad b(x) = x \sin^2 x \operatorname{tg} x, \quad c(x) = x \log(1+x)$$

$$d(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x^2}, \quad e(x) = \operatorname{cosh} x, \quad f(x) = 3^{x+1}$$

$$g(x) = \log(1-x^2)$$

Es 2 Determinare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{cosh}^2 x - 1 - x^2}{x^4}$$

Es 3 Determinare il numero reale d tale che per $x \rightarrow 0$ si abbia

$$\operatorname{arctg}^5 x - 2 \sin^5 x + x^5 = d x^9 + o(x^9)$$

Es 4 Determinare un numero reale d ed un intero positivo m in modo che per $x \rightarrow 0$ si abbia

$$(a) \quad \log \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{6} x^2 = d x^m + o(x^m)$$

$$(b) \quad \operatorname{tg} x^3 - (\operatorname{tg} x)^3 = d x^m + o(x^m)$$

Es 5 Dire se $x=0$ è punto di minimo locale, di massimo locale oppure nessuna delle due cose per la funzione

$$f(x) = \log(1 + \sin x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3$$

Es 6 Determinare il segno di

$$f(x) = \arctan^5 x - 2 \sin x^5 + x^5$$

per $x > 0$ piccolo

Es 7 Dimostrare i seguenti fatti:

- Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari allora $f(0) = 0$.
- Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari e derivabile allora f' è dispari.
- Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è dispari e derivabile allora f' è pari.

Es 8 Sia $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $]a, b[$ e derivabile in $]a, x_0[\cup]x_0, b[$. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \alpha \in \mathbb{R}$$

Dimostrare che f è derivabile in x_0 e che $f'(x_0) = \alpha$.

Es 9 Dimostrare che la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile infinite volte e che $f^{(m)}(0) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.