Esercizi 13.12.2011

1) Determinare, se esistono, il massimo e il minimo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3} \quad , \quad x \neq 0$$

$$g(x) = \sqrt{1 + \sin e^x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

$$h(x) = \log x - \log^2 x \quad , \quad x > 0$$

$$l(x) = \arcsin \frac{x}{x+1} \quad , \quad x \in A = \left\{ x \neq -1 \;\middle|\; \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 1 \right\}$$

2) Un laboratorio conduce una serie di test per studiare il passaggio nel sangue di una sostanza iniettata per via intramuscolare. Il modello matematico ipotizzato fornisce la concentrazione Y della sostanza in funzione del tempo t nella forma

$$Y(t) = \frac{2t}{t^2 + 4} \quad , \quad \forall t \geq 0 .$$

(a) Determinare la percentuale di sostanza presente nel sangue nell'istante dell'iniezione, dopo una, due e tre ore.

(b) Determinare gli intervalli di tempo in cui la concentrazione cresce o diminuisce.

(c) Determinare quando si ha il picco della concentrazione e quale è il valore massimo raggiunto.

(d) Confrontare il modello precedente con il modello alternativo

$$Y(t) = \frac{2t}{16 + t^3} \quad , \quad \forall t \geq 0 .$$

3) Il flusso luminoso in un punto è direttamente proporzionale al quoziente tra l'intensità della sorgente luminosa e il quadrato della distanza del punto dalla sorgente. Due sorgenti di intensità A e B distano d l'una dall'altra. In quale punto della loro congiunte il flusso luminoso è minimo?

4) Sia a tale che $f(x) = ax - \dfrac{x^3}{1+x^2}$ risulti crescente. Provare che $a \geq 9/8$

5) Trovare il massimo valore della costante positiva K per cui si ha $K \log x \leq \sqrt{x} \quad \forall x > 0$

6) Dimostrare le disuguaglianze:

a) $1 - \dfrac{x^2}{2!} \leq \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\log(1 + \sin x) \leq \operatorname{arctg} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$

c) $\dfrac{2x}{2 - x^2} > \sin x \qquad 0 < x < \sqrt{2}$

d) $e^{-x} + \sin x > 1 \qquad 0 < x < \pi/2$

e) $x e^{1/x} > 1 \qquad x > 0$

7) a) Trovare i punti dell'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ che minimizzano la distanza da $(a, 0)$, al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Stessa domanda per l'iperbole $x^2 - y^2 = 1$.

8) Determinare, tra tutti i settori circolari di perimetro 1, quello di area massima.

9) a) Dimostrare che la funzione

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \quad f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+3}$$

è invertibile.

b) Detta $g : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ la funzione inversa di f, determinare $g'(-\frac{\pi}{4})$.

10) a) Dimostrare le formule di addizione per le funzioni iperboliche (cfr. es. 2 del 6.12.2011):

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b$$
$$\sinh(a+b) = \sinh a \cdot \cosh b + \cosh a \cdot \sinh b$$

b) Scrivere esplicitamente le funzioni inverse di $\sinh x$ e di $\cosh x$ ristretta a $[0, +\infty[$.