- RICORDEREMO LA DEFINIZIONE DI ALCUNE FUNZIONI.

La settimana passata: le funzioni lineari.

- INTRODURREMO DEI CONCETTI GENERALI

La settimana prossima: cosa è una funzione crescente.

<u>Esercizio 10</u> Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una <u>funzione lineare</u>. tale che $\underline{f(2) = 4}$ e $\underline{f(8) = 6}$.

– Determinare f e calcolare $f(10)$.

<u>1° MODO</u>

$$f(x) = \underline{a}\,x + \underline{b}$$

$$f(2) = 2a + b = 4 \qquad \text{quindi} \quad \boxed{b = \underbrace{4 - 2a}}$$

$$f(8) = 8a + \underbrace{b} = 6$$

ottengo $8a + 4 - 2a = 6$

$$6a + 4 = 6$$

$$6a = 2$$

$$\boxed{a = 1/3}$$

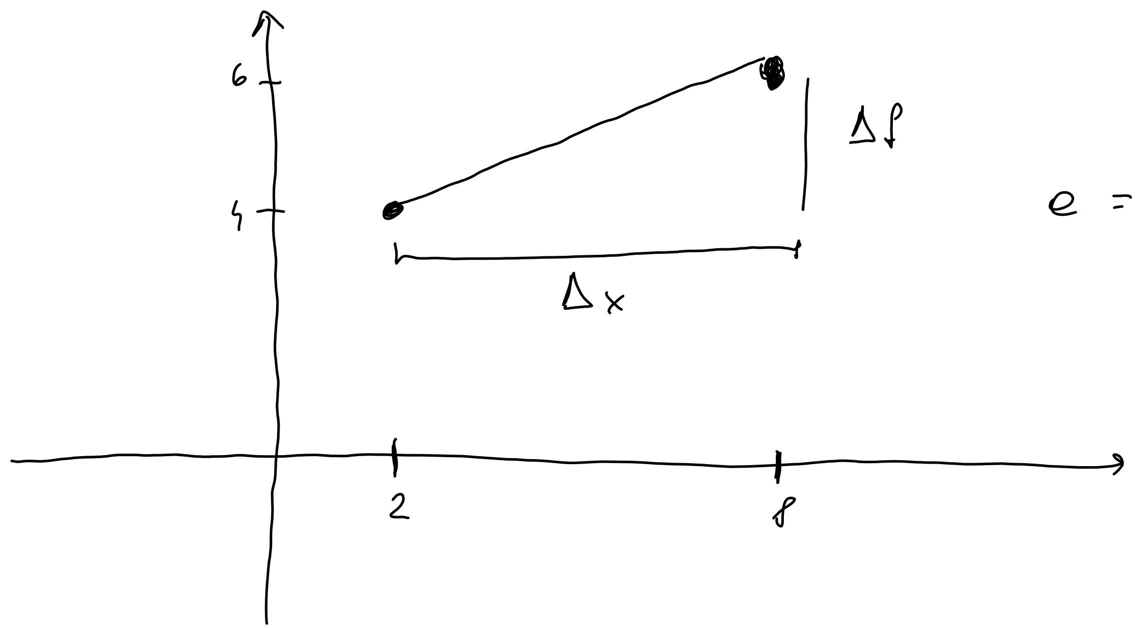
$$b = 4 - 2e = 4 - \frac{2}{3} = \frac{12-2}{3} = \frac{10}{3}$$

La mia funzione è $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

2° MODO

$f(2) = 4$

$f(8) = 6$



$$e = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(8) - f(2)}{8 - 2} = \frac{6 - 4}{8 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Rimane da calcolare b. Uso il fatto che

$f(x) = \frac{1}{3} x + b$ e che $f(2) = 4$

$4 = \frac{2}{3} + b$ quindi $b = \frac{10}{3}$

Quindi $f(10) = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}$.

ESERCIZIO 11

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineare e $\underline{f(1) = 3}$ $\quad f(3) = 7$

$f(x) = ax + b$

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 3}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$3 = f(1) = a \cdot 1 + b = 2 \cdot 1 + b = 2 + b$$

e quindi $b = 1$

$f(x) = 2x + 1.$

Per quali x $\quad f(x) = 0$?

" " $\quad f(x) > 0$?

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione e k è un numero reale possiamo l'insieme delle soluzioni

nel 1° CASO $\quad f(x) = k \quad$ EQUAZIONE

nel 2° " $\quad f(x) > k \quad$ DISEQUAZIONE

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) = k \}$$ SONO LE SOLUZIONI DELL'EQ.

$$B = \{ x \in \mathbb{R} : f(x) > k \}$$ SOLUZIONI DELLA DISEQUAZIONE.

NEL NOSTRO CASO DOBBIAMO CAPIRE PER QUALI x

1° $f(x) = 2x + 1 = 0$

2° $f(x) = 2x + 1 > 0$

1° $\quad 2x + 1 = 0$ ovvero $2x = -1$ ovvero $x = -\frac{1}{2}$

quindi $\quad f(x) = 0$ solo per $x = -\frac{1}{2}$ $\qquad A = \{-\frac{1}{2}\}$

2° $\quad 2x + 1 > 0$ ovvero $2x > -1$ ovvero $x > -\frac{1}{2}$

---

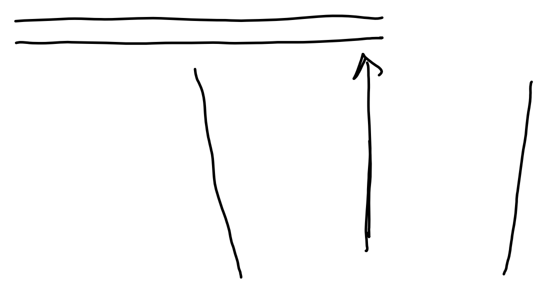
quindi $\quad f(x) > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$. per $x \in (-\frac{1}{2}; \infty)$

• FUNZIONI DI SECONDO GRADO O QUADRATICHE

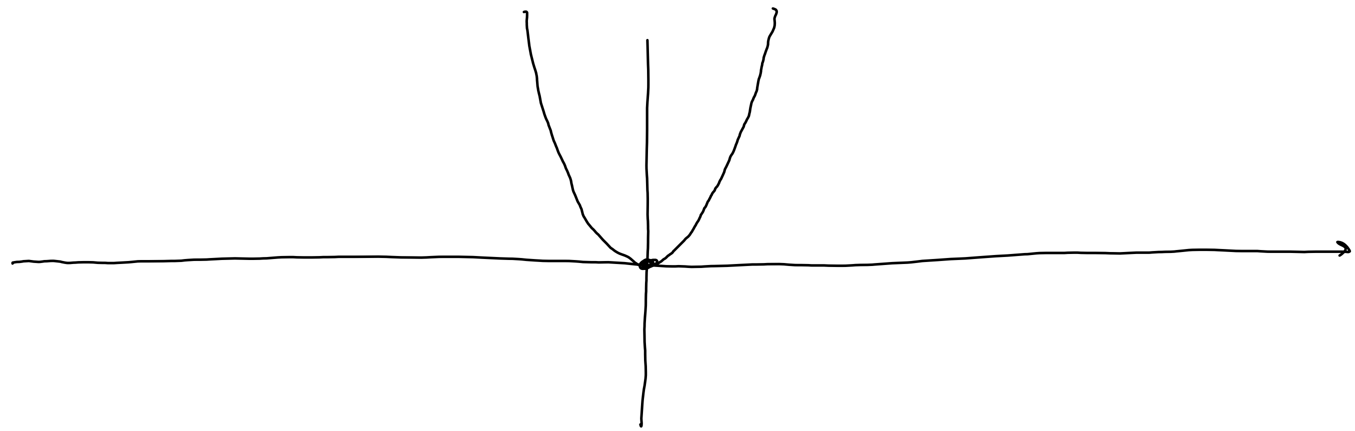
SONO LE FUNZIONI CHE SI POSSONO SCRIVERE NELLA FORMA $f(x) = a x^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

I° CASO $f(x) = a x^2$

Esempio $f(x) = x^2$ o $f(x) = -x^2$

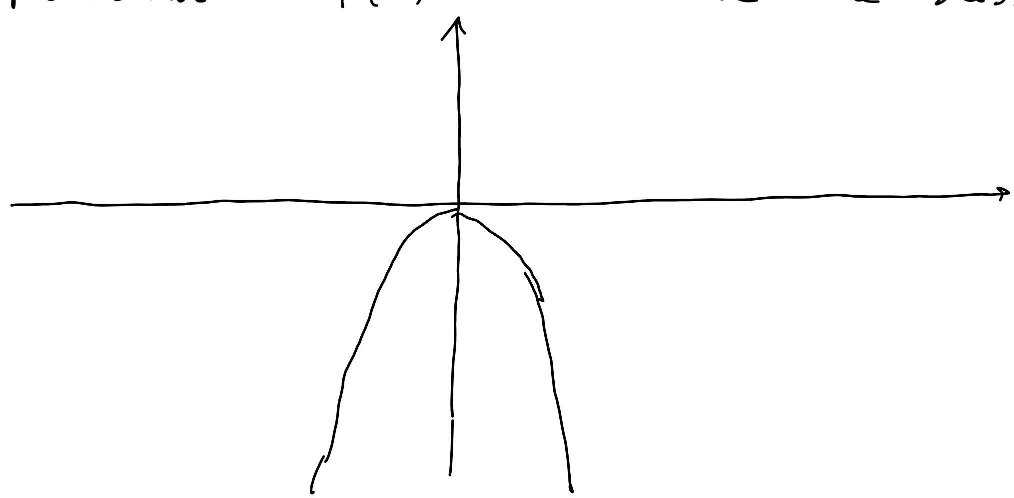


x	$f(x)$
0	0

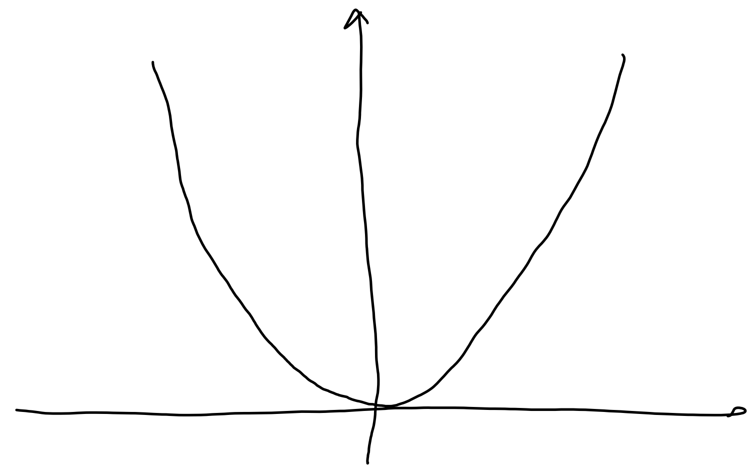


1	1
2	5
−1	1
−2	4

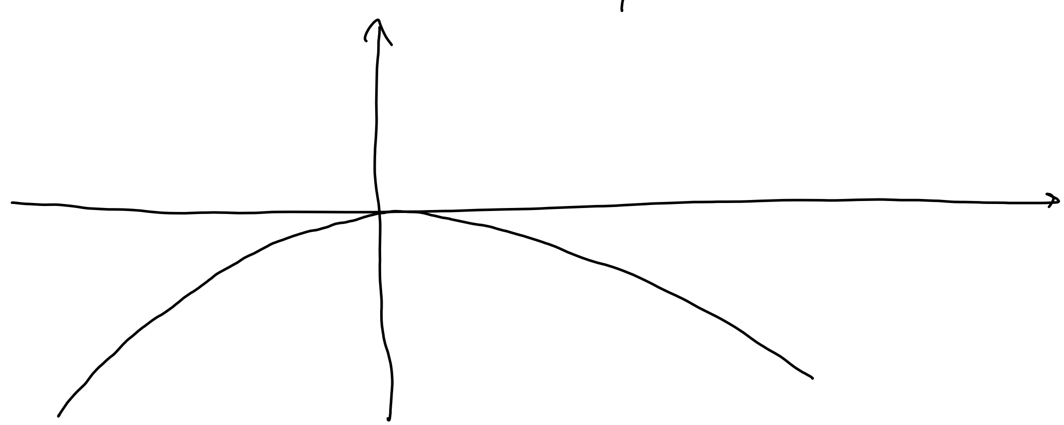
LA FUNZIONE $f(x) = -x^2$ ha la stessa forma ma è ribaltata



Se $a > 0$ $f(x) = \underline{\underline{a}}x^2$

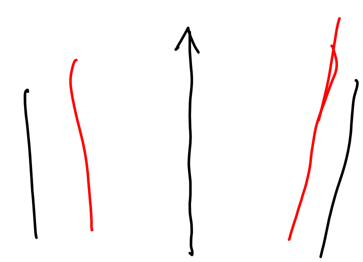


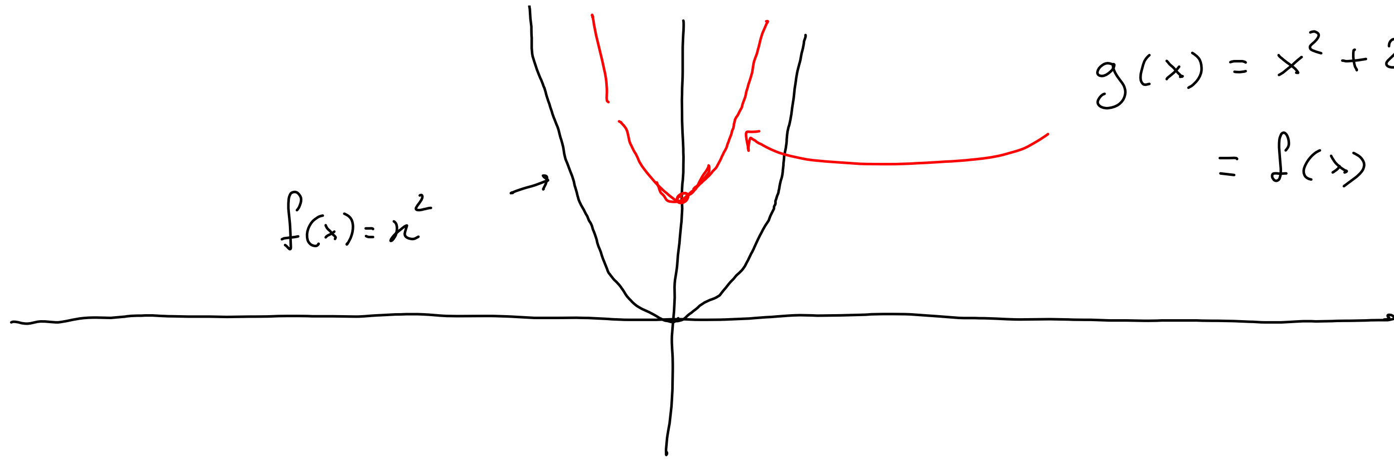
Se $a < 0$



II° CASO $\quad f(x) = \underbrace{a x^2} + \underbrace{c}.$

Se io so disegnare il grafico di $f(x) = a x^2$ so disegnare anche quello di $a x^2 + c$, basta spostare il grafico di c lungo le y.





$g(x) = x^2 + 2$

$= f(x) + 2$

III° CASO

$f(x) \simeq \alpha (x-\beta)^2 + \gamma$

$$f(x) = 5x^2 - 15x + 10$$

$$= 5\left(x^2 - 3x + 2 \right)$$

$$= 5\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 \right) =$$

$$= 5\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2 - \frac{9}{4}\right) =$$

$$= 5\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$(x-\beta)^2 = x^2 - 2\beta x + \beta^2$$

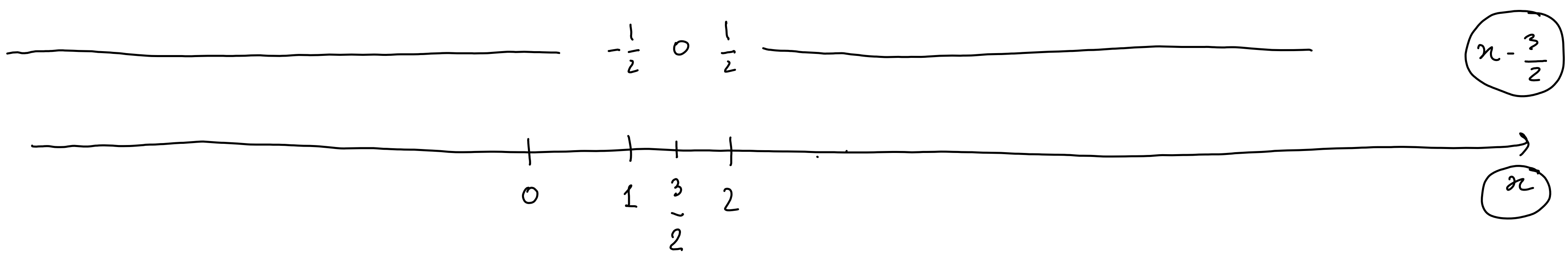
$$-2\beta = -3 \qquad \beta = \frac{3}{2}$$

$$\beta^2 = \frac{9}{4}$$

$$= 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

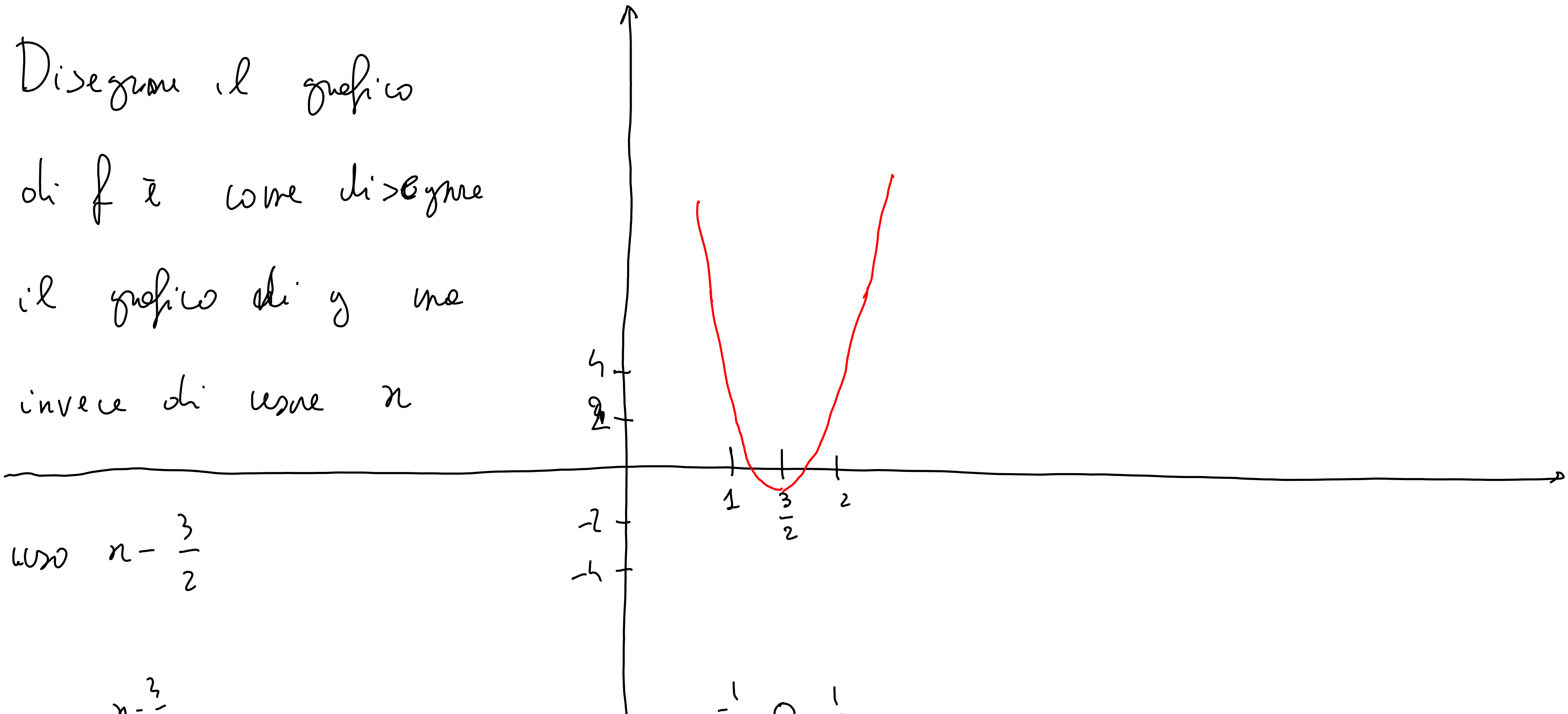
$$f(x) = 5x^2 - 15x + 10 = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

- $f(x) = 5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} =$
- $g(x) = 5x^2 - \frac{5}{4}$

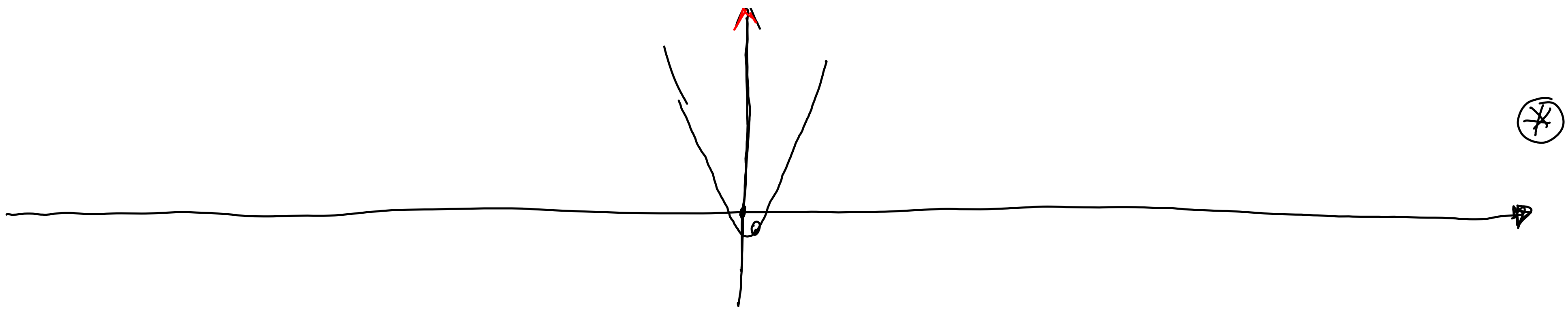


Disegnare il grafico di f è come disegnare il grafico di g ma invece di usare x uso $x - \frac{3}{2}$

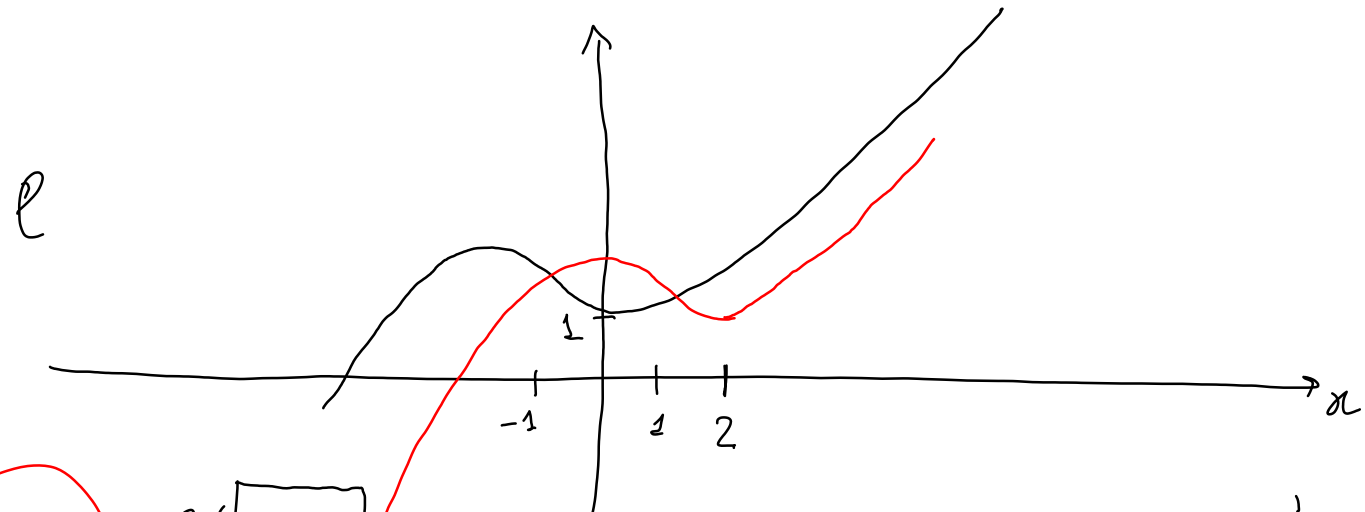
$x - \frac{3}{2}$



$-\frac{1}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

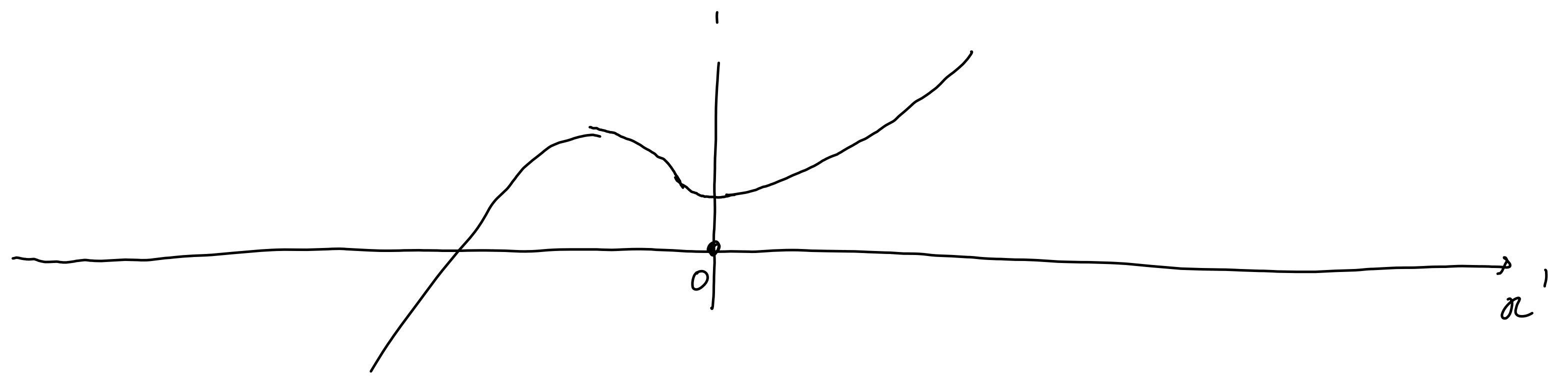


Esempio



$$m(x) = \ell(\boxed{x-2})$$

$$x - 2 = x'$$



IN GENERALE UNA FUNZIONE DI SECONDO GRADO SI SCRIVE SEMPRE NELLA FORMA

$$f(x) = \underline{\alpha (x-\beta)^2 + \gamma}$$

$$f(x) = a x^2 + bx + c$$

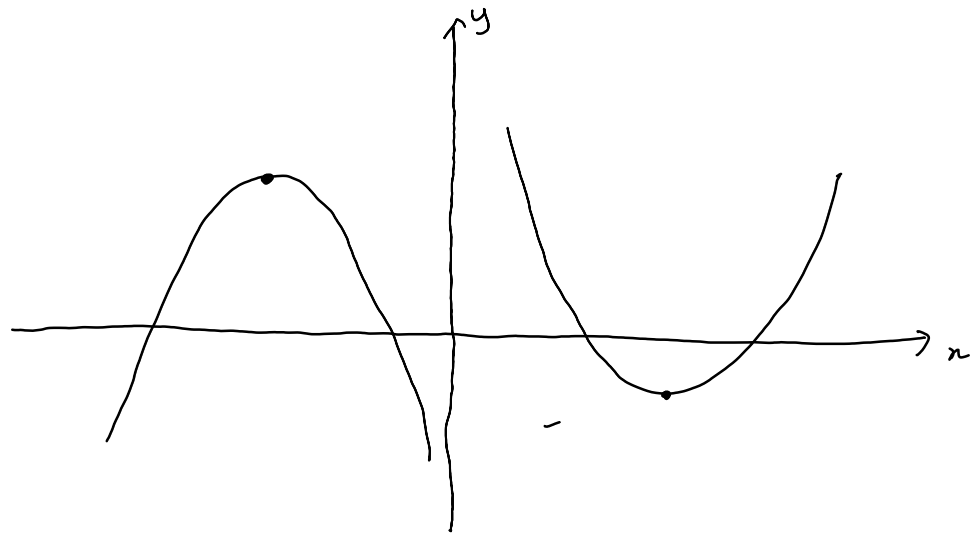
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\underbrace{x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \boxed{\frac{b^2}{4a^2}}}\boxed{-\frac{b^2}{4a^2}} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \underbrace{c-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\alpha \qquad \beta = -\frac{b}{2a} \qquad \gamma = c - \frac{b^2}{4a}.$$



DEFINIZIONE (GENERALE) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di massimo se per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x_0) \geq f(x)$

x_0 si chiama punto di massimo di f

$f(x_0)$ si chiama il valore massimo o il massimo di f

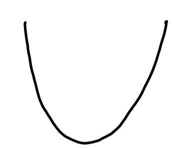
Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è un punto di minimo se per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\qquad f(x_0) \leq f(x)$

x_0 si chiama punto di minimo di f

$f(x_0)$ " " " valore minimo o minimo di f.

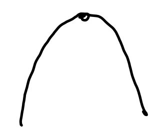
<u>ESEMPIO</u>

- $f(x) = x^2$



$x_0 = 0$ è un punto di minimo

$f(x_0) = 0$ è il minimo di f.

- $f(x) = -x^2$ 

  $x_0 = 0$ è un punto di massimo

- $f(x) = x^2 + 1$

  $x_0 = 0$ è un punto di minimo

  $f(x_0) = 1$ è il minimo.

- $f(x) = 5x^2 - 15x + 10 = \underline{5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$

$x_0 = \frac{3}{2}$ è un punto di minio

e $f(x_0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 \cdot \underbrace{\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} - \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$

è il minimo.

DEVO FAR VEDERE CHE PER OGNI x

$f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}$

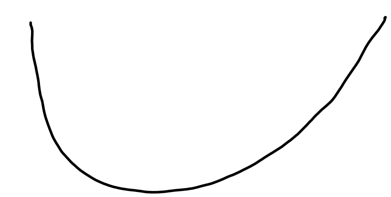
INFATTI per ogni x $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$

$5\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$

$$5\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\geq-\frac{5}{4}$$

$$f(x)\geq f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$$

IN GENERALE SE $a>0$



e $f(x)=ax^2+bx+c$

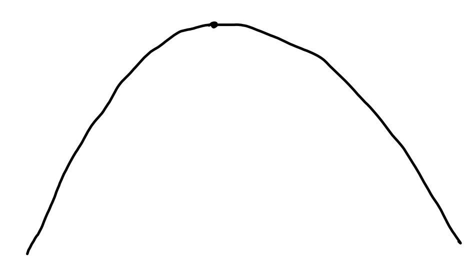
$$=a\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}+c-\frac{b^2}{4a^2}$$

ABBIAMO FATTO IL CONTO

DA CUI DEDUCIAMO CHE $\boxed{x_0 = \frac{-b}{2a}}$ È UN PUNTO DI MINIMO.

SE INVECE $a < 0$

e $f(x) = ax^2 + bx + c$



ALLORA $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$ È UN PUNTO DI MASSIMO

ESERCIZIO

$$f(x) = \overset{\overset{0}{\wedge}}{6}x^2 + 4x + 2$$

TROVARE IL PUNTO DI MINIMO E IL VALORE MINIMO.

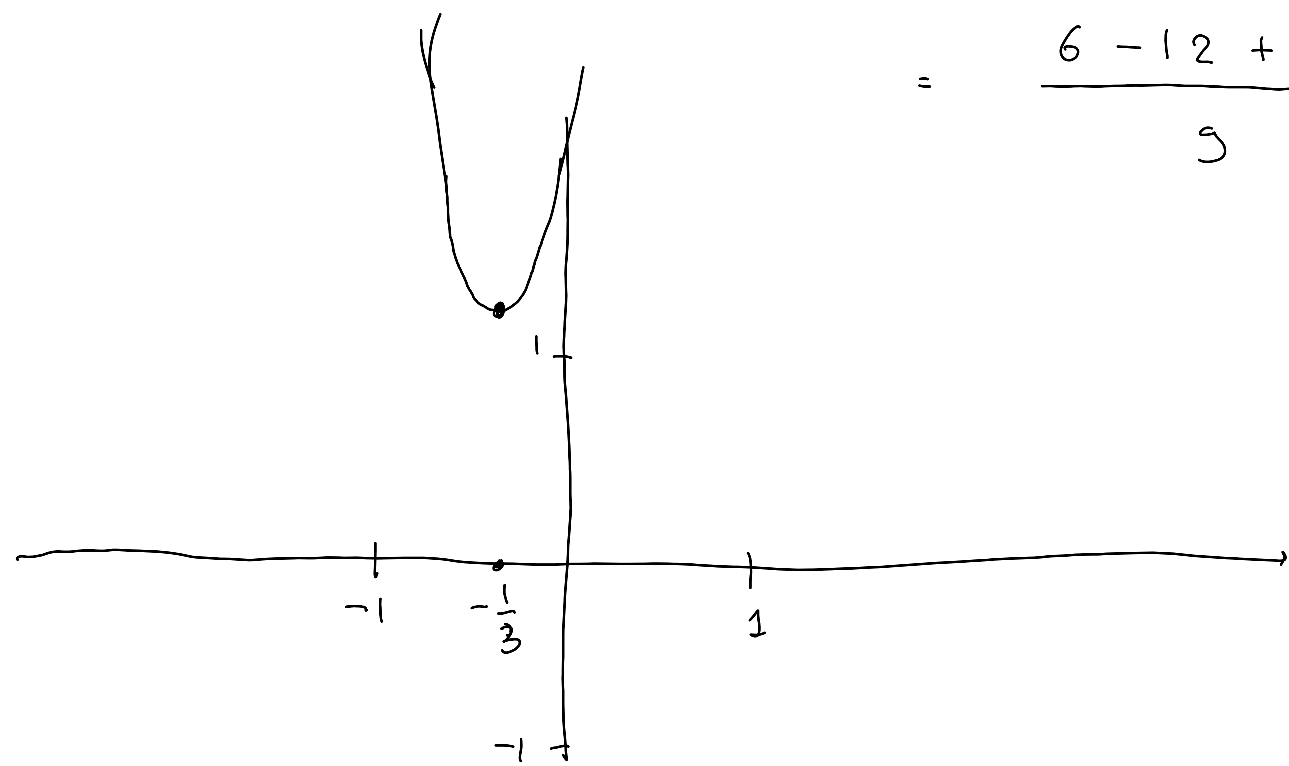
SOLUZIONE

IL PUNTO DI MINIMO DI f È $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}$

E IL VALORE MINIMO, È $f\left(-\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 2$

$$= \frac{6}{9} - \frac{4}{3} + 2$$

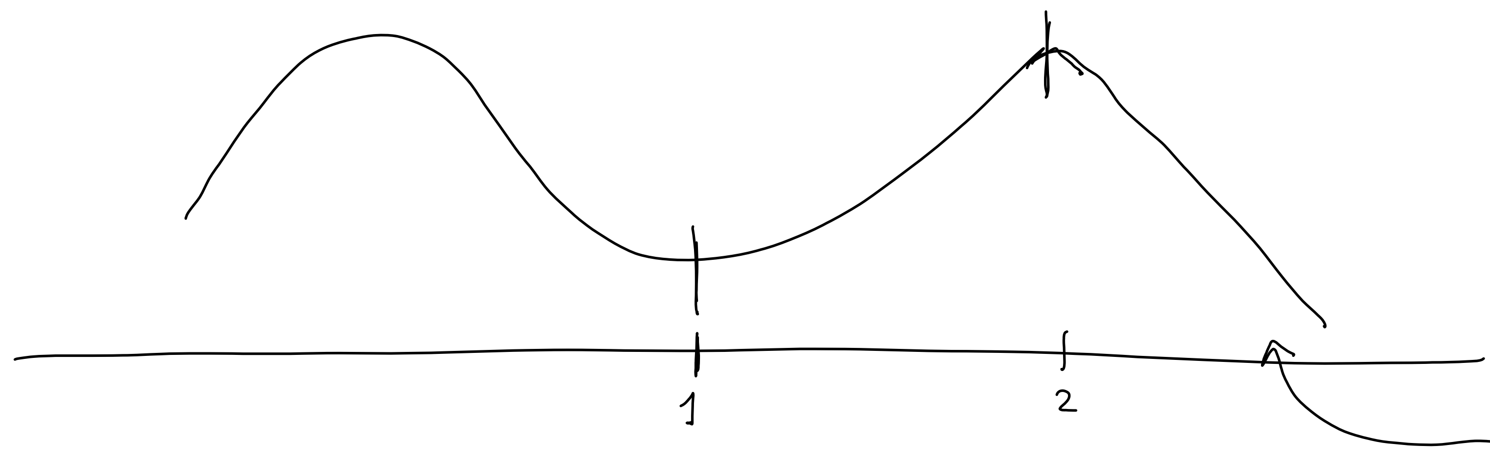
$$= \frac{6 - 12 + 18}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$



UNA FUNZIONE DI SECONDO GRADO NON È NE' CRESCENTE NE' DECRESCENTE.

DEFINIZIONE GENERALE

Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione e $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo o una semiretta diciamo che f è crescente nell'intervallo I se per ogni $\boxed{x, y \in I}$ con $x < y$ si ha $f(x) < f(y)$



ESEMPIO LA FUNZIONE IL CUI GRAFICO È

È CRESCENTE NELL'INTERVALLO [1, 2].

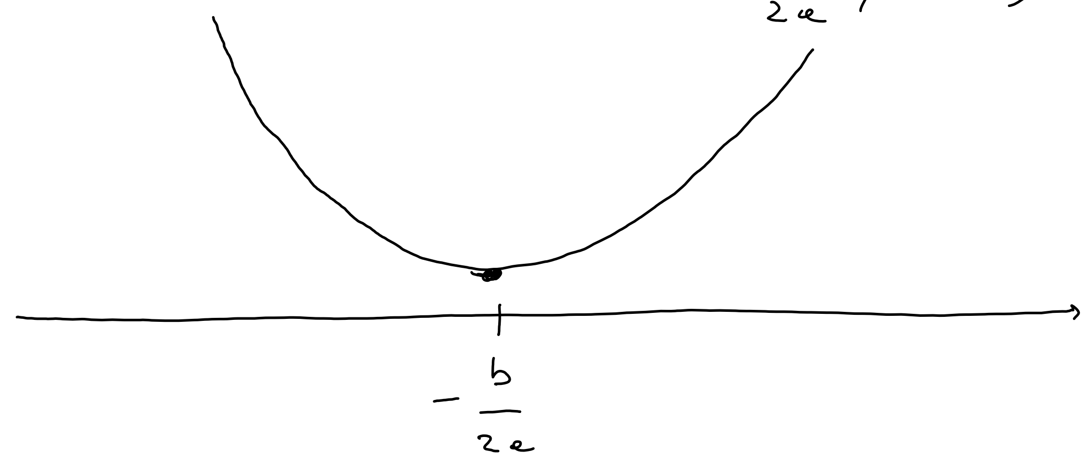
SIMILMENTE SI DEFINISE UNA FUNZIONE DECRESCENTE IN I.
(DARE LA DEF. PER

ESERCIZIO)

SE $f(x) = a x^2 + bx + c$ E $a > 0$

LA FUNZIONE f È DECRESCENTE IN $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$,

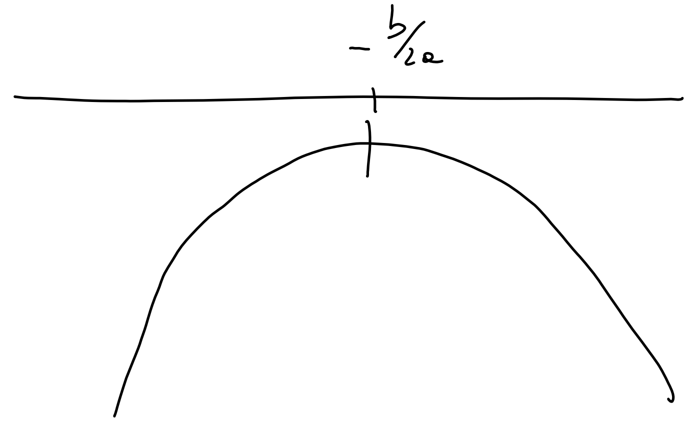
LA FUNZIONE f È CRESCENTE IN $\left[-\frac{b}{2a} ; +\infty\right)$ //



SE $a < 0$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$

LA FUNZIONE È CRESCENTE IN $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$

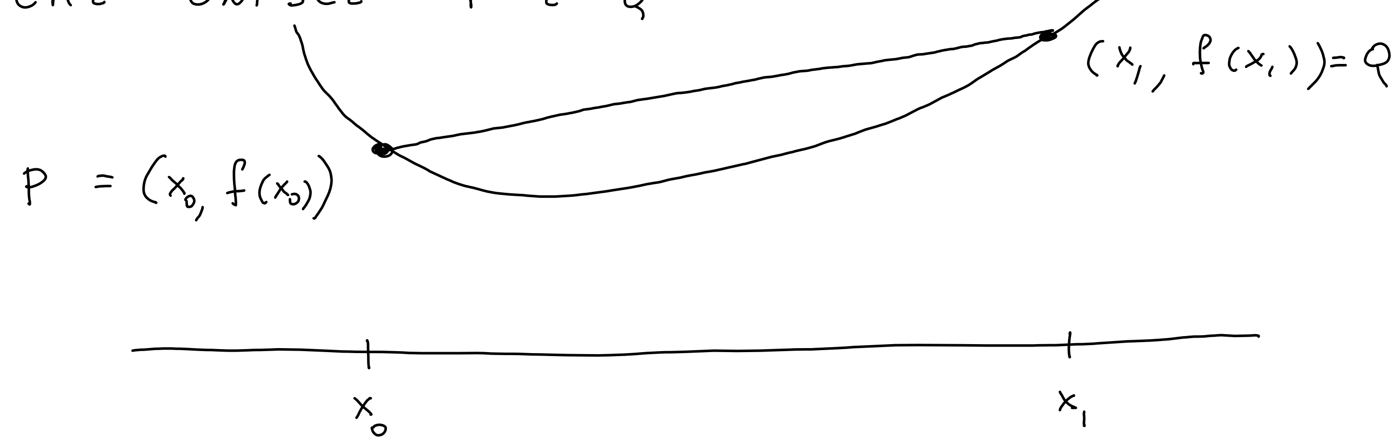
E DECRESCENTE IN $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$



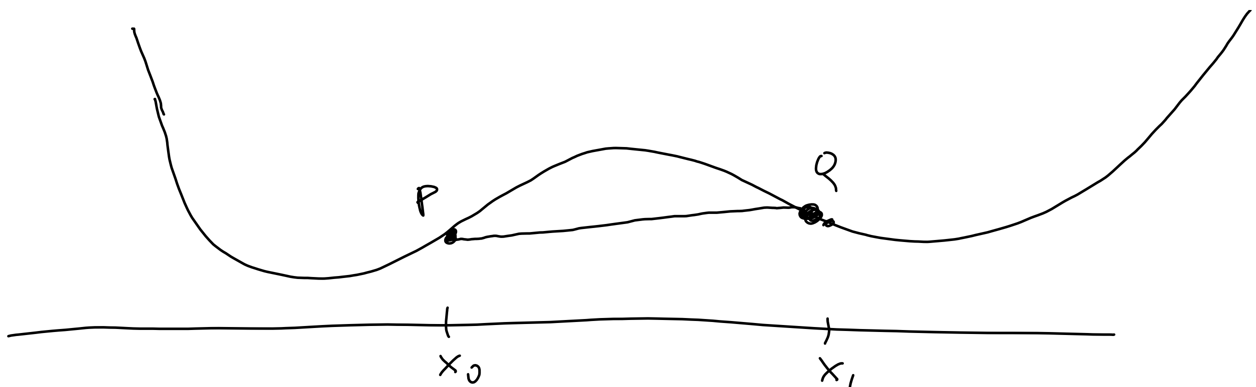
<u>DEFINIZIONE</u> $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x_0 < x_1$

DICIAMO CHE f È CONVESSA SE PRESI $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ E CONSIDERATI I PUNTI $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x_1, f(x_1))$ IL SEGMENTO CHE UNISCE P E Q DEVE STARE SOPRA IL GRAFICO.



ESEMPIO



← GRAFICO DI f

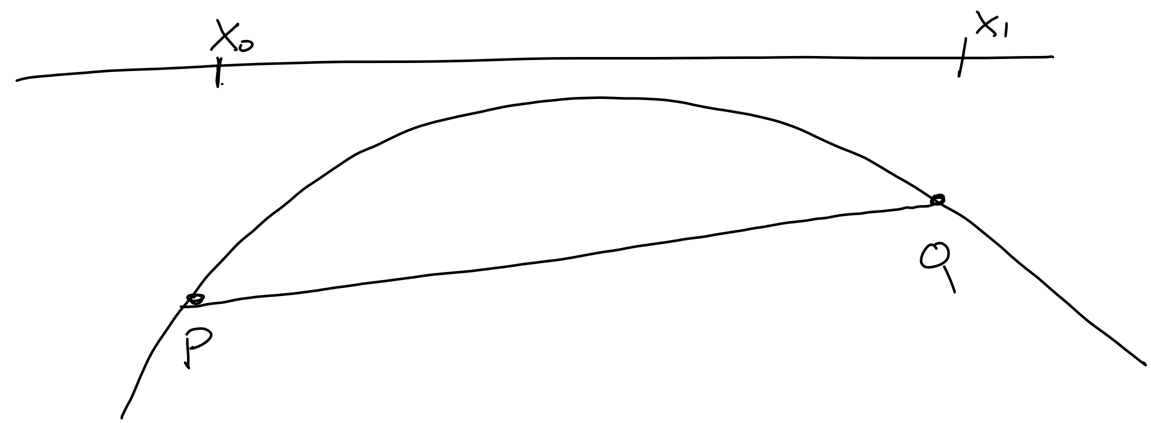
f NON È CONVESSA PERCHÉ SE SCELGO x_0 E x_1 COME NELLA FIGURA ALLORA IL SEGMENTO PQ NON È SOPRA IL GRAFICO.

DEFINIZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ SI DICE CONCAVA

SE PRESI $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ CON $x_0 < x_1$

E CONSIDERATI I PUNTI $P = (x_0 \; f(x_0))$ $Q = (x_1 \; f(x_1))$;

IL SEGMENTO PQ STA SOTTO IL GRAFICO



ESEMPIO SE $f(x) = a x^2 + bx + c$

SE $a > 0$ f è convessa

Se $a < 0$ f è concava.

- CRESCENTI IN UN INTERVALLO
- PUNTI DI MASSIMO E MASSIMI
- CONVESSE (- -)
- LIMITE PER $x \to +\infty$.
- PUNTI DI MASSIMO LOCALE ||

ESERCIZIO 8

$$C = \{ x \in \mathbb{R} : \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \}$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4 = 2$$

$$x_1 = \frac{6 + 2}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

$$C = \{ 2, 4 \}$$

$$D = \{ x \in \mathbb{R} : \underline{x + 1 \in C} \} \quad *$$

$0 \notin D$ perché $0 + 1 \notin C$.

$$D = \{1, 3\}$$

$$E = \{x+1 : \underline{x \in C}\} = \{3, 5\}$$

$\textcircled{x}$

x	$x+1$
2	3
4	5

FACCIO VARIARE x TRA GLI ELEMENTI DI C E CALCOLO $x+1$

x	2	4
$x+1$	3	5

ESERCIZIO 12

5 litri per pianta — 4 chili di pomodori

8 litri per pianta — 6 chili di pomodori

IPOTESI - C'È UNA RELAZIONE LINEARE TRA LITRI E CHILI

$$f(x) = ax + b$$

- $\boxed{f(5) = 4}$
- $f(8) = 6$

$$a = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{6 - 4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3}x + b \qquad f(5) = 4$$

SOSTITUISCO $\quad f(5) = \frac{2}{3} \cdot 5 + b = 4$

$$\frac{10}{3} + b = 4 \qquad b = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \frac{2}{3} x + \frac{2}{3}$$

SE VOGLIO OTTENERE 10 Kg per piante sto cercando

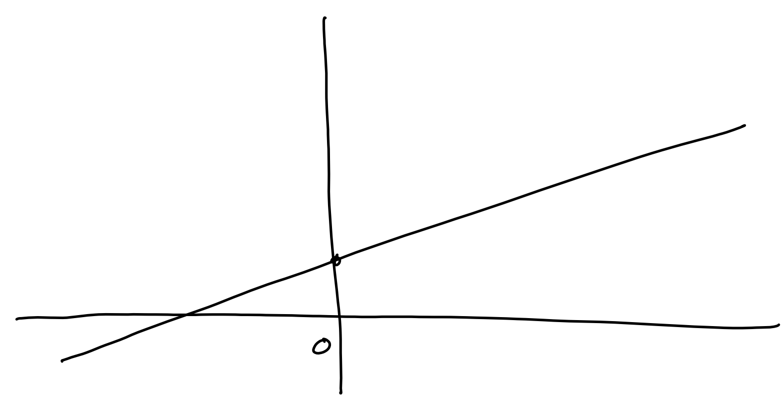
x tale che $f(x) = 10$

ovvero $\frac{2}{3} x + \frac{2}{3} = 10$

$$2x + 2 = 30$$

$$x + 1 = 15$$

$$x = 14.$$



ESERCIZI SULLE FUNZIONI QUADRATICHE

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione quadratica

e sia $f(0) = 2$ $\quad f(1) = -1$ $\quad f(2) = 2$

DETERMINARE f E DETERMINARE

PER QUALI x $\quad f(x) > 0$

E PER QUALI x $\quad f(x) = 0$

$\underline{f(x) = a x^2 + b x + c}$

$\underline{f(0) = 2}$ $\quad \underline{f(1) = -1}$ $\quad \underline{f(2) = 2}$

I: $2 = f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$

II: $-1 = f(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = a + b + c$

III: $2 = f(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 4a + 2b + c$

I) $c = 2$

II) $-1 = a + b + 2$ $\quad \boxed{a + b = -3}$

III) $2 = 4a + 2b + 2$ $\quad 4a + 2b = 0$

$2a + b = 0 \quad \underline{b = -2a}$

II) $a - 2a = -3$ ovvero $-a = -3 \quad \underline{a = 3}$

III) $b = -2a = -6.$

$$\boxed{f(x) = 3x^2 - 6x + 2}$$

$f(0) = 2$

$f(1) = -1$

$f(2) = 2$

- QUANDO $f(x) = 0$?

QUANDO $f(x) > 0$?

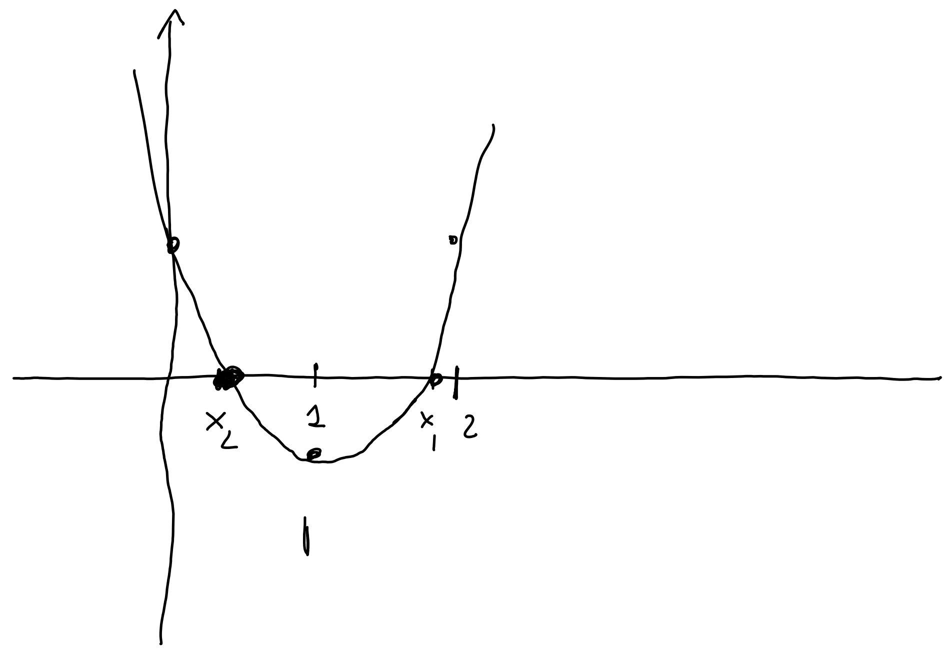
$f(x) = 0$ ovvero $3x^2 - 6x + 2 = 0$

$$\Delta = 36 - 24 = 12 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi $f(x) = 0$ per $x = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$



Quindi $f(x) > 0$ per $x < x_2$ o per $x > x_1$

Ovvero $f(x) > 0$ per $x < 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ o per $x > 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$

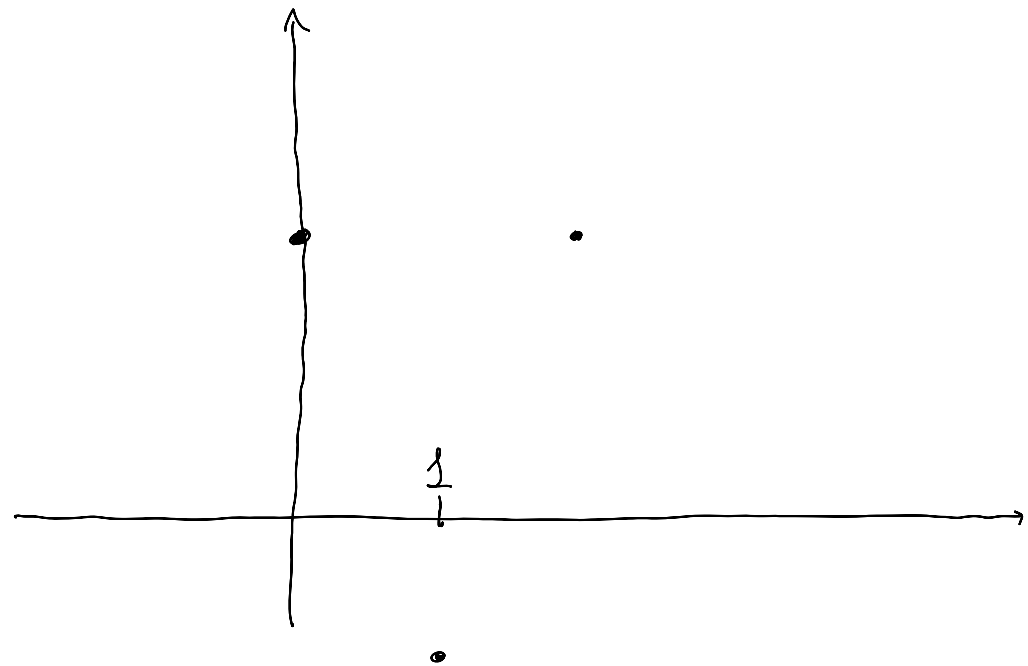
per $x \in \left(-\infty ; 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} ; +\infty\right)$

II° MODO DI FARE LA PRIMA PARTE DELL'ESERCIZIO

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quadratica

$f(0) = f(2) = 2$

$f(1) = -1$



$$f(x) = \alpha \underline{(x-\beta)^2} + \gamma$$

$\beta = 1$ $\qquad$ $f(1) = \gamma = -1$

$\gamma = -1$

$$f(x) = \alpha (x-1)^2 - 1$$

$2 = f(0) = \alpha \cdot 1 - 1$ ovvero $\alpha = 3$.

$$f(x) = 3(x-1)^2 - 1$$

ESERCIZIO

$$f(x) = x^3 - x^2$$

STUDIAMO PER QUALI x, LA FUNZIONE $f(x)$ SI ANNULLA, PER QUI È POSITIVA E PER QUALI È NEGATIVA.

$$f(x) = \underline{x^2}\ \underline{(x-1)}$$

QUINDI $f(x) = 0$ SOLO QUANDO $x^2 = 0$ O $(x-1) = 0$

OVVERO PER $x = 0$ E PER $x = 1$.

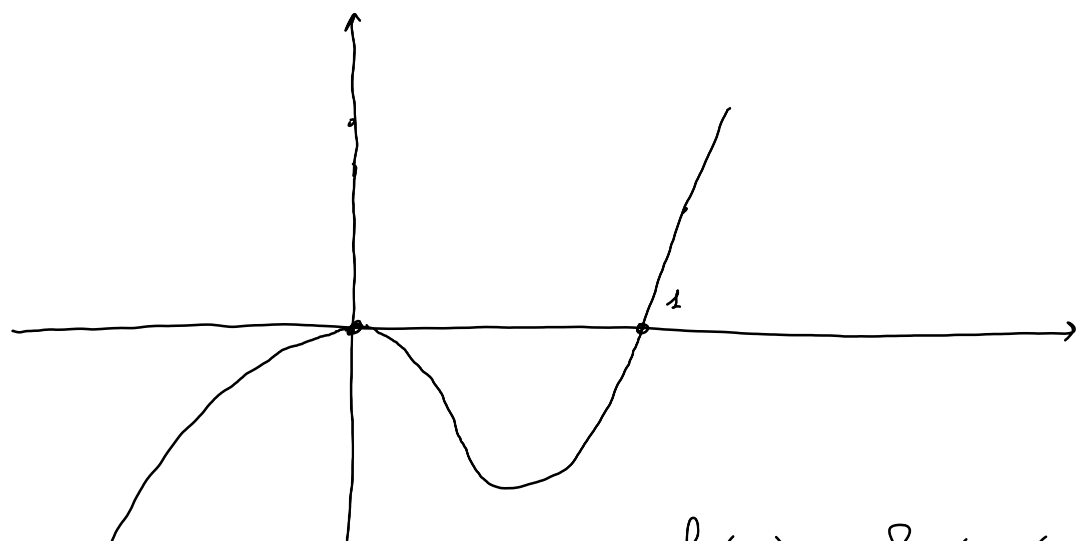
SE $x \neq 0$ $x^2 > 0$

QUINDI PER $x \neq 0$ $f(x) > 0$ SE E SOLO SE $x - 1 > 0$.

QUINDI $f(x) > 0$ PER $x > 1$.

$f(x) = 0$ PER $x = 0$ E $x = 1$

$f(x) < 0$ PER $x < 0$ o $0 < x < 1$



$f(2) = 8 - 4 = 4 > 0.$

DEFINIZIONE

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE

x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE SE LA FUNZIONE VICINO A x_0 ASSUME VALORI MINORI O UGUALI A $f(x_0)$.

x_0 È UN PUNTO DI MASSIMO LOCALE SE ESISTE UN NUMERO $\delta > 0$ TALE CHE SE $x \in (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$ ALLORA

$$f(x) \leq f(x_0)$$

NELL'ESEMPIO DI PRIMA P

$x_0 = 0$

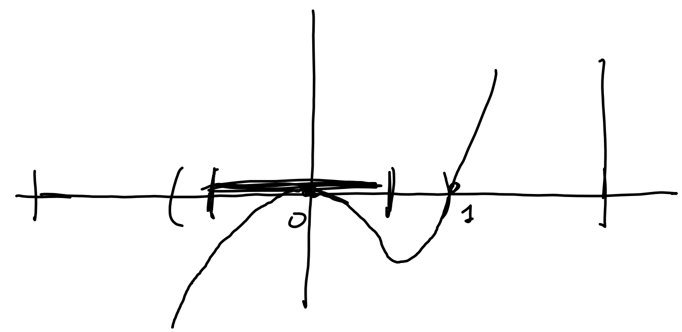
~~$\delta = 2$~~

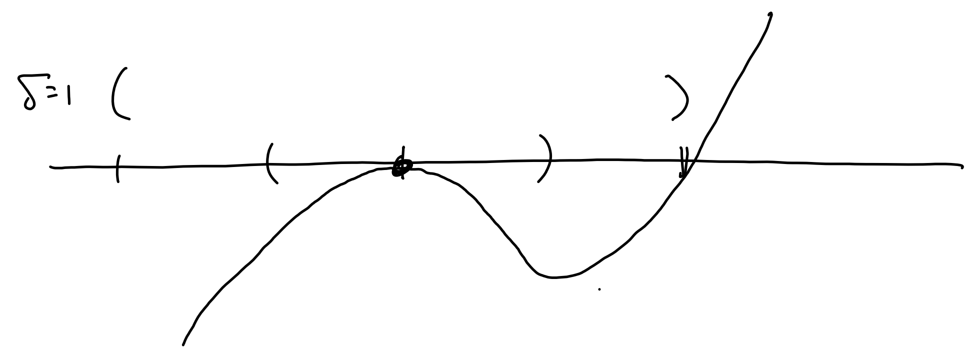
$\delta = 1$

~~$\delta = 0$~~

$\delta = 1/2$

~~$\delta = -1$~~





DEFINIZIONE $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

x_0 È UN PUNTO DI MINIMO LOCALE

SE ESISTE $\delta > 0$ TALE CHE

SE $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ALLORA

$$f(x) \geq \overline{f(x_0)}$$