LEZIONE 28 SET.

Esercizio $16^{-\frac{3}{4}}$

$$16^{-a} = \frac{1}{16^{a}}$$

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{4}}}$$

$$16^{3/4} = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3$$

$$= (2)^3 = 8$$

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

$$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{8}$$

Esercizio 4 Nel 2000 una popolazione è $100'000 = 10^5$ in termini relativi aumenta ogni anno dello 0,1.

L'aumento in termini assoluti dall'anno n all'anno $n+1$

è $$P_{n+1} - P_n = \Delta P_n$$

dove P_n è la popolazione nell'anno n.

L'aumento in termini relativi all'anno n

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = 0{,}1$$

$$P_{n+1} - P_n = 0{,}1\, P_n$$

$$P_{n+1} = P_n + 0{,}1\, P_n = (1+0{,}1)\, P_n$$

$$= 1{,}1\, P_n$$

$$\boxed{P_{n+1} = 1{,}1 \cdot P_n}$$

$$P_{2005} = 1{,}1\, P_{2004} = 1{,}1 \; 1{,}1 \; P_{2003} = (1{,}1)^2 P_{2003}$$

$$= (1{,}1)^5 \cdot P_{2000} = 1{,}61 \cdot 100'000$$

$$= 161'000$$

Quanto era la popolazione nell'anno 1992

ATTENZIONE NON È VERO CHE LA POPOLAZIONE DALL'ANNO n+1 ALL'ANNO n DIMINUISCE IN TERMINI RELATIVI DELLO 0,1

$$P_{2000} = (1{,}1)\; P_{1999} =$$

$$= (1{,}1)^8 P_{1992} =$$

$$=$$

RICAVO $\dfrac{P_{2000}}{(1,1)^8} = P_{1992}$

$$= \frac{100'000}{(1,1)^8} = 46'651$$

Esercizio 6

Se una popolazione aumenta in un anno del 5%

Di quanto deve diminuire nell'anno successivo

per tornare al valore originale?

P_1

$$P_2 = P_1 + \frac{5}{100} P_1 = (1 + 0,05)\, P_1$$

$$P_2 = (1{,}05)(P_1)$$

$$P_3 = P_1 = \frac{P_2}{1{,}05}$$

$$P_3 = \frac{1}{1{,}05} P_2 = 0{,}9524 \cdot P_2$$

$$\frac{P_3 - P_2}{P_2} = \frac{0{,}9524\, P_2 - P_2}{P_2} =$$

$$\frac{(0{,}9524 - 1)\cancel{P_2}}{\cancel{P_2}} = -0{,}0476 = -\frac{4{,}76}{100}$$

LA POPOLAZIONE DEVE DIMINUIRE DEL 4,76%.

Esercizio 3 Nel 2000 la popolazione è di 1'000'000 $= 10^6$ ab.

Ogni anno la popolazione diminuisce del 5 %.

Quanto è la popolazione nel 2010 e nel 1990?

$$P_{n+1} = P_n - \frac{5}{100} P_n = \left(1 - \frac{5}{100}\right) P_n = \underline{\underline{0{,}95}}\; P_n$$

$$P_{2010} = (0{,}95)^{10} P_{2000} = 0{,}6\; P_{2000}$$

$$P_{2000} = (0{,}95)^{10} P_{1990} = 0{,}6\; P_{1990}$$

$$\underline{\underline{P_{2010}}} = 0{,}6 \cdot P_{2000} = 0{,}6 \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^5$$
$$= 600'000$$

$$P_{2000} = 0{,}6\; P_{1990} =$$

$$P_{1990} = \frac{P_{2000}}{0,6} = \frac{1}{0,6} \cdot 10^6 =$$

$$= 1,67 \cdot 10^6 = 1'670'000$$

- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $\mathbb{R}$

INTERVALLI CHIUSI E APERTI

SEMIRETTE

- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$

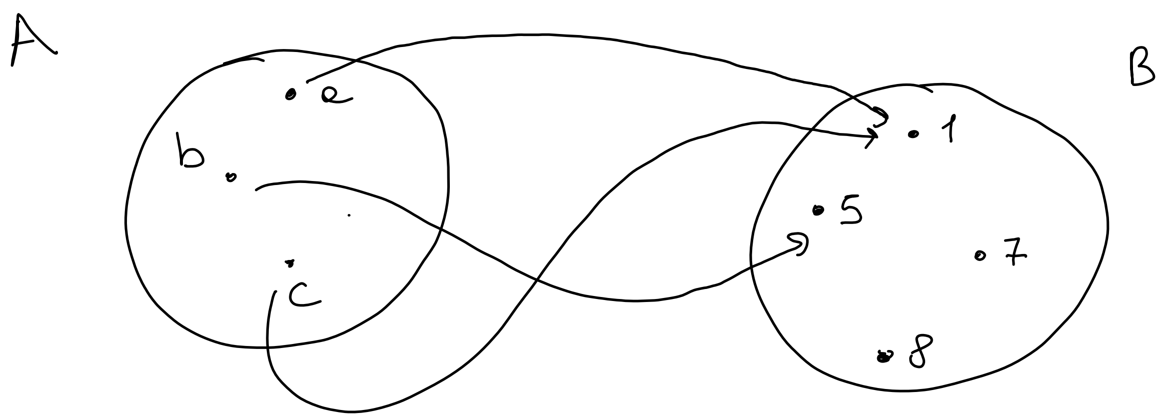
È IL PIANO CARTESIANO.

FUNZIONI E RAPP. GRAFICA DI FUNZIONI

DATI DUE INSIEMI A e B UNA FUNZIONE f DA A IN B È UNA "REGOLA" CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO DI A UN ELEMENTO DI B.

- è una definizione molto generale perché A e B sono insiemi qualsiasi.

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{1, 5, 7, 8\}$$

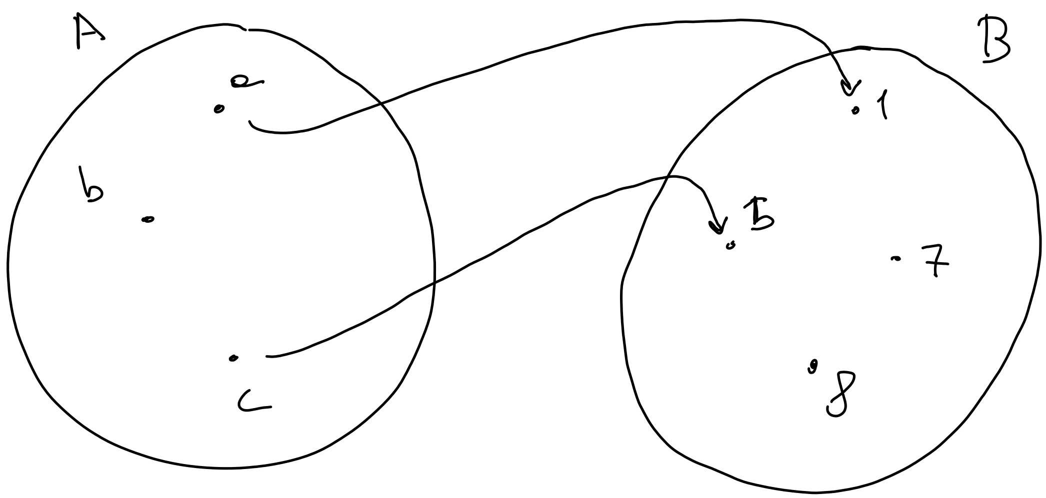


UNA FUNZIONE f PUÒ ESSERE DEFINITA DA QUESTA FIGURA CHE VUOL DIRE CHE f ~~associa ad~~

a 1 a associa 1
a b associa 5
e a c associa 1

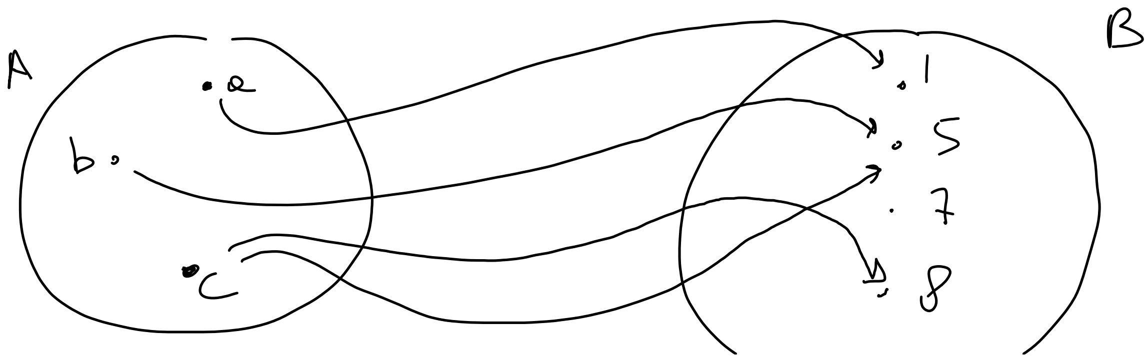
$f(a) = 1$
$f(b) = 5$
$f(c) = 1$

ESEMPIO



NON È UN DISEGNO CHE SUGGERISCE UNA REGOLA CHE DEFINISCE UNA FUNZIONE PERCHE NON DICE COSA ASSOCIARE A b.

Esempio 2



NON SI CAPISCE QUALE SIA L'ELEMENTO DA ASSOCIARE A C.

SE f È UNA FUNZIONE DALL'INSIEME ALL'INSIEME B

SCRIVIAMO $f: A \longrightarrow B$

SI LEGGE f È UNA FUNZIONE DA A IN B.

NOI SAREMO INTERESSATI AL CASO DI FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$

$$\boxed{f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$$

PIÙ IN GENERALE

$$\boxed{f: A \longrightarrow \mathbb{R}}$$

DOVE A È UN INTERVALLO O UNA SEMIRETTA DI $\mathbb{R}$

FUNZIONI COSTANTI

__esempio__ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 5$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

FUNZIONI LINEARI

Se a e b sono due numeri reali possiamo considerare la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

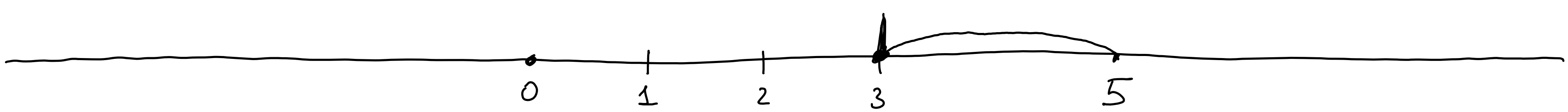
$$\underbrace{f(x) = ax + b} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Esempio $a = 2 \quad b = 3 \quad f(x) = \underline{2x + 3}$

per esempio $f(7) = 2 \cdot 7 + 3 = 17$

Le funzioni di questo tipo si chiamano **funzioni lineari**

Esempio Sia P un punto che si muove nella retta a velocità costante $2 \frac{m}{sec}$ e che all'istante 0 si trova a $3\,m$ a destra dell'origine



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(t)$ mi dice dove si trova il punto P dopo t secondi.

$$f(0) = 3$$

$$f(1) = 3 + 2 = 5$$

$$f(50) = 3 + 2 \cdot 50 = 103$$

$$f(t) = 3 + 2t$$

è una funzione lineare.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DI UNA FUNZIONE

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione

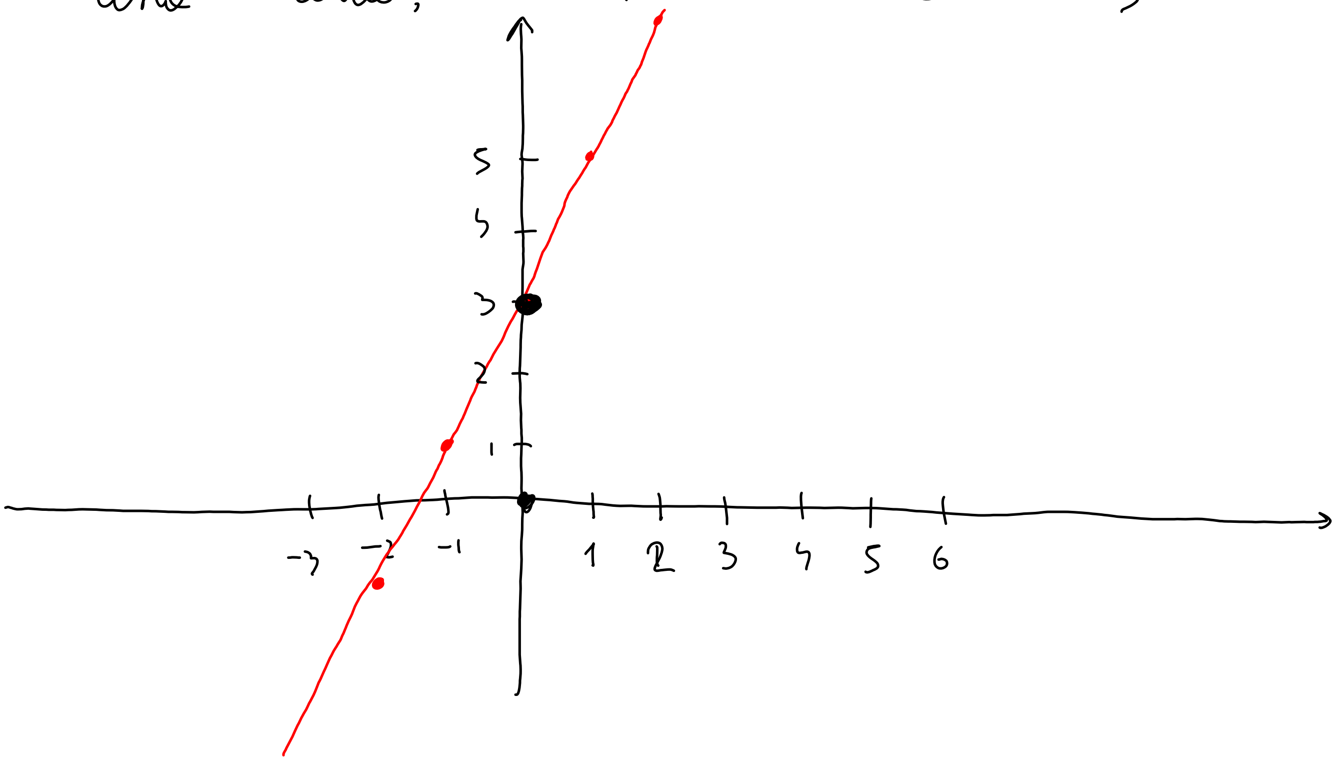
Il $\text{Grafico}(f)$ è il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\text{Grafico}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \}$$

ESSENDO UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2$ LO POSSIAMO DISEGNARE

Se $f(x)$ è lineare il grafico di f è

una retta, $f(x) = 2x + 3$ $\quad f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



x	$y = f(x)$
-2	$-1 = -4 + 3$
-1	1
0	3
1	5
2	7
3	9

TROVIAMO UNA RETTA

SE $f(x) = a x + b$ I COEFFICIENTI SI CHIAMANO

$\boxed{a}$ SI CHIAMA COEFFICIENTE ANGOLARE

b SI CHIAMA INTERCETTA ALL'ORIGINE.

$$\boxed{f(0) = a \cdot 0 + b = \boxed{b}.}$$

b è l'altezza a cui si trova il grafico sopra l'origine.

COME SI PUÒ CALCOLARE a

PRENDIAMO DUE NUMERI REALI x_1 e x_2 DISTINTI

CALCOLIAMO $y_1 = f(x_1) = a x_1 + b$

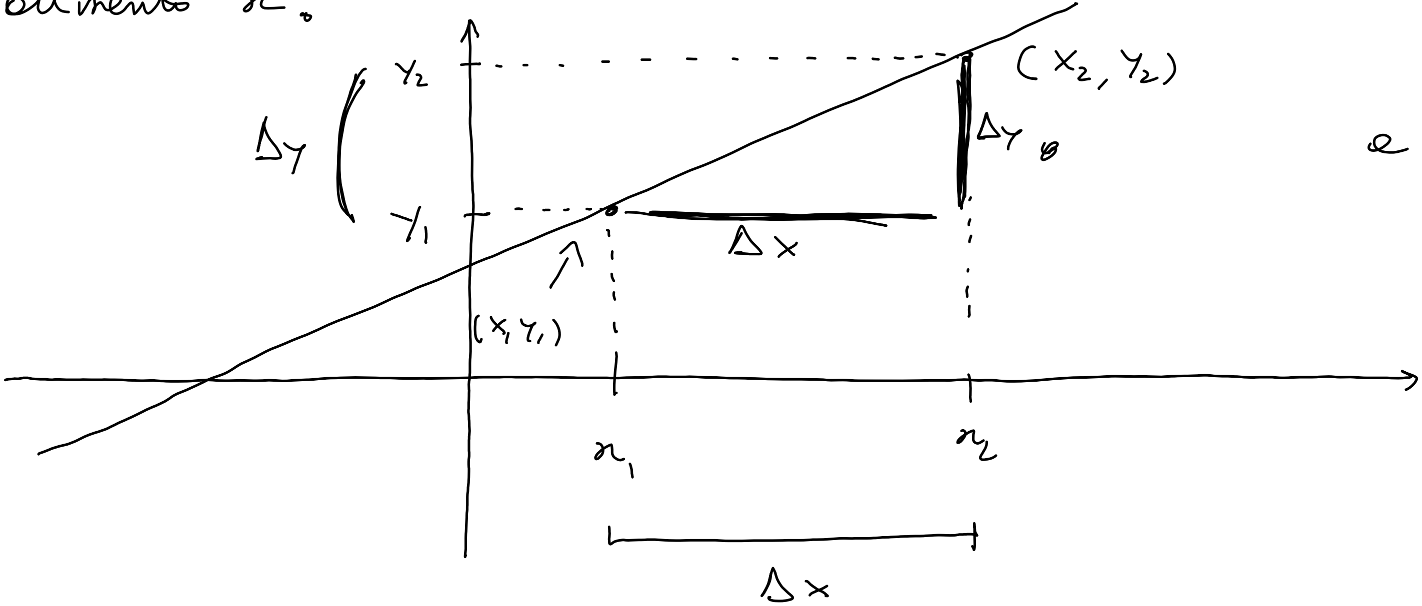
$$y_2 = f(x_2) = a x_2 + b$$

CONSIDERO IL RAPPORTO $\dfrac{\boxed{y_2 - y_1}}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{a x_2 \cancel{+b} - a x_1 \cancel{-b}}{x_2 - x_1} = \frac{a \cancel{(x_2 - x_1)}}{\cancel{x_2 - x_1}} = a.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a \qquad \text{ovvero} \qquad \underline{\Delta y = a \, \Delta x.}$$

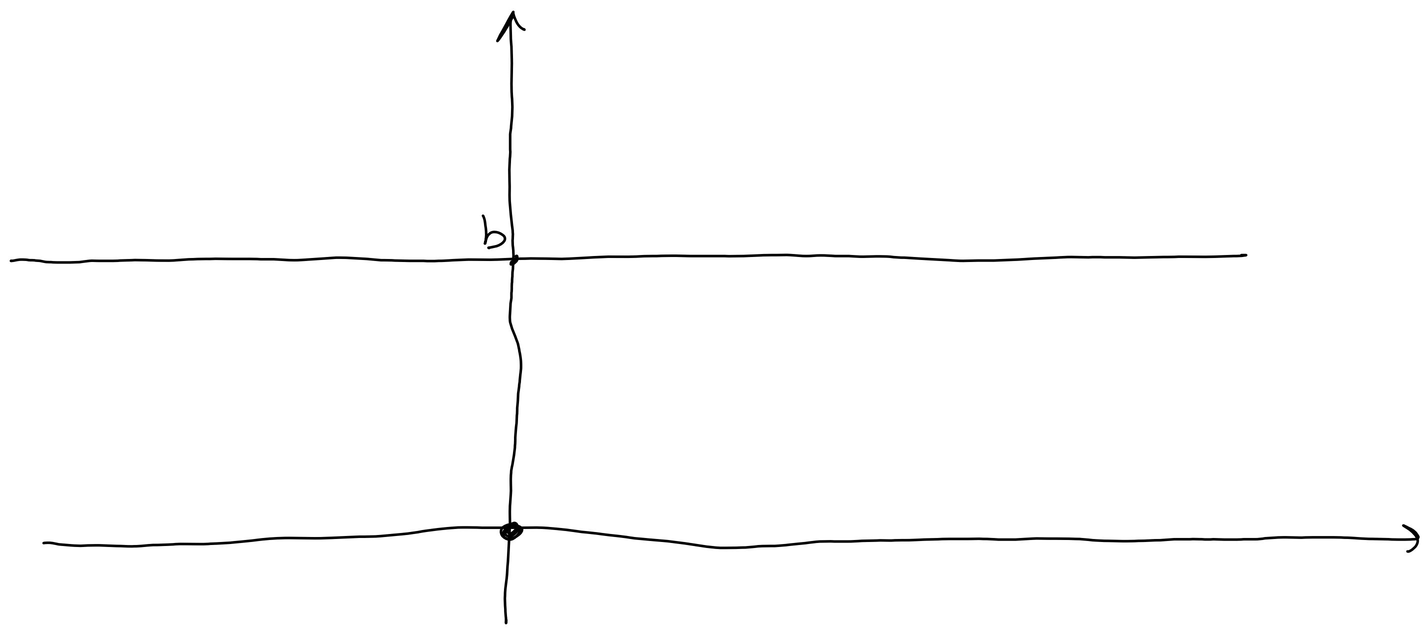
questa relazione dice di quanto aumenta y quando aumenta x.



$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

OSSERVAZIONE SE $a = 0$ e $f(x) = ax + b$
$= 0x + b = b$

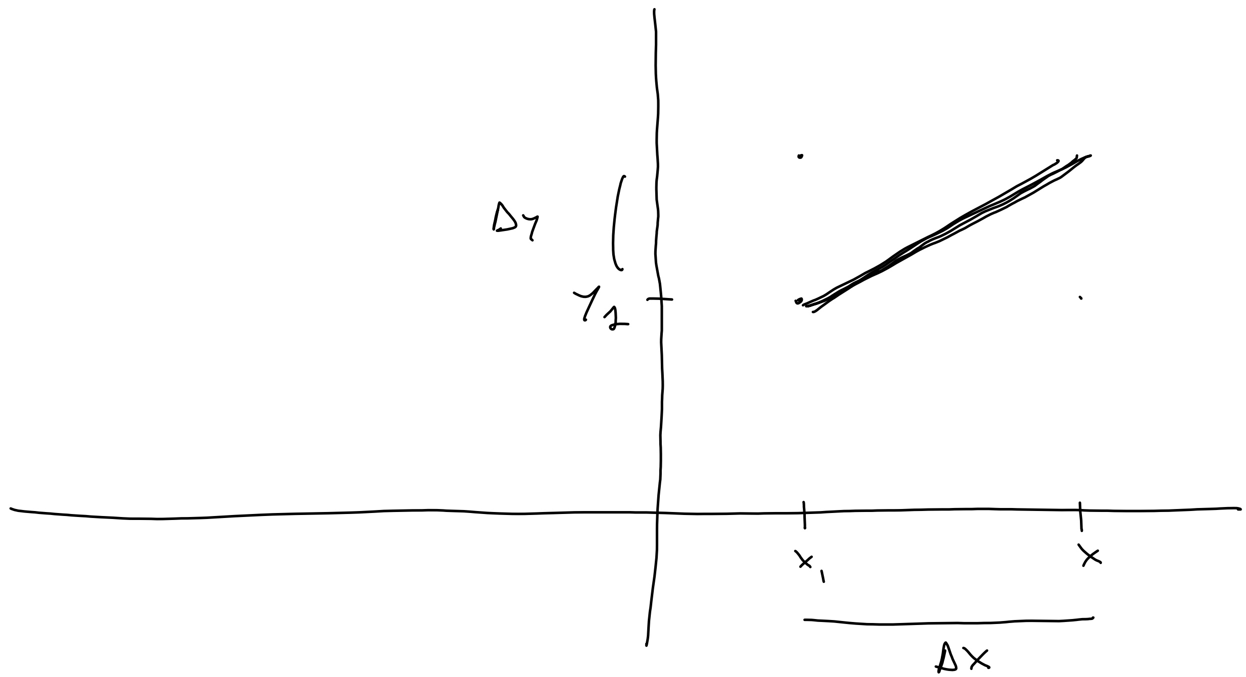
OTTENIAMO UNA FUNZIONE COSTANTE



Y NON CAMBIA AL VARIARE DI X

SE $a > 0$ $\underline{\Delta y} = a\,\underline{\Delta x}$

e $\Delta x > 0$ anche $\Delta y > 0$



se x aumenta

anche y aumenta.

Se $a < 0$ e $\Delta x > 0$ $\quad \Delta y = \underset{\substack{\wedge\\ 0}}{a} \cdot \underset{\substack{\vee\\ 0}}{\Delta x} < 0$

Se x aumenta y diminuisce

DEFINIZIONE

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Dico che è crescente se quando aumenta x aumenta anche f.

Ovvero se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$

Dico che è decrescente se quando aumenta x, la funzione f diminuisce ovvero

se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$

PRIMA ABBIAMO VISTO CHE SE $f(x) = ax+b$

Se $a > 0$ f è crescente.

Se $a < 0$ f è decrescente.

DEFINIZIONE

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

f è non decrescente se quando aumenta x la funzione f aumenta o rimane uguale ovvero

se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \leq f(x_2)$

f è non crescente se quando aumenta x la funzione f diminuisce o rimane uguale ovvero

se $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) \geq f(x_2)$