INSIEMI

NOTAZIONI:

$\in$ appartenere $\qquad 3 \in \mathbb{N} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$

$\subset$ contenuto $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

ATTENZIONE

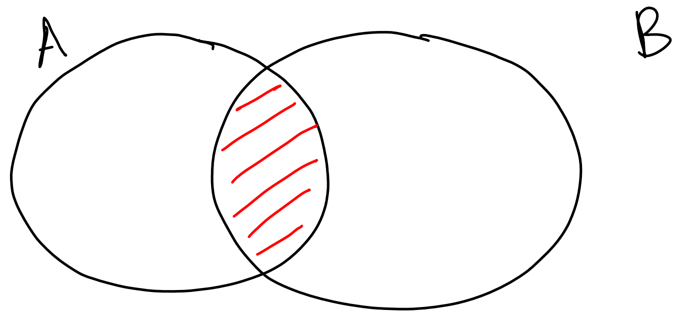
$\mathbb{N} \in \mathbb{R}$ NON È VERO. | $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \subset \mathbb{R}$ NON È VERO | $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

QUESTE SONO VERE

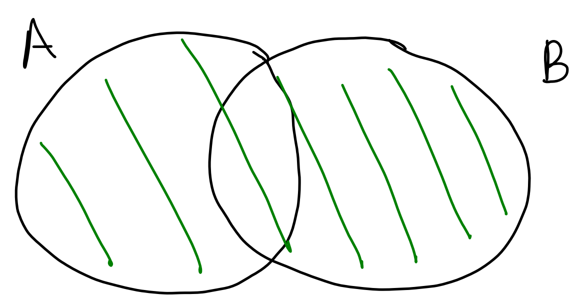
$\cap$ intersezione

Se ho due insiemi A e B posso costruirne un terzo che si chiama A intersecato B e si indica con $A \cap B$ i cui elementi sono gli elementi che sono comuni ad A e B



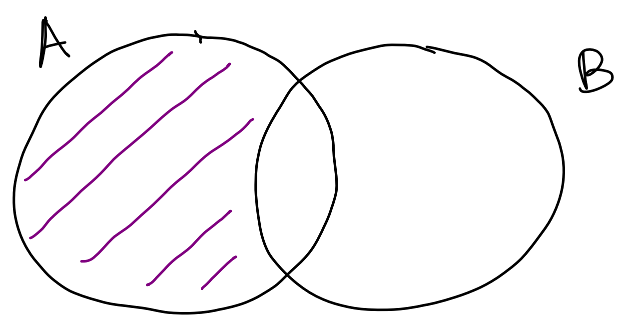
$\cup$ l'unione

Se A e B due insiemi posso costruire l'insieme A unito B che si indica con $A \cup B$ i cui elementi sono gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi



differenza di due insiemi

Se A e B sono due insiemi posso costruire un terzo insieme che si chiama A senza B e si indica con $A \setminus B$ i cui elementi sono gli elementi di A che non sono anche elementi di B



COME DEFINIRE UN INSIEME:

1ª POSSIBILITÀ: ELENCARE TUTTI GLI ELEMENTI

Esempio, A è l'insieme i cui elementi sono i numeri 3, 7 e 8. Più sinteticamente possiamo scrivere

$$A = \{3, 7, 8\}$$

A è uguale all'insieme, la descrizione dell'insieme è tra parentesi graffe e ~~sono~~ dentro le parentesi sono elencati i suoi elementi.

non è importante l'ordine $A = \{3, 8, 7\}$

non sono importanti le ripetizioni $A = \{3, 7, 3, 8, 3\}$

Possiamo elencare gli elementi di un insieme anche in un modo più complicato

$$B = \{ n+1 \text{ tali che } n \in A \}$$

B è l'insieme degli elementi della forma $n+1$ tali che $n \in A$.

Faccio variare n in $A = \{3, 7, 8\}$

$$B = \{4 = 3+1,\ 8 = 7+1,\ 9 = 8+1\}$$

n	$n+1$	$n-2$
3	4	1
7	8	5
8	9	6

$C = \{n-2$ tale che $n \in A\} = \{1, 5, 6\}$

$P = \{2n$ tale che $n \in \mathbb{N}\}$ Sono i numeri pari ≥ 0

$D = \{2n+1$ tale che $n \in \mathbb{Z}\}$ Sono i numeri dispari.

<u>1e OSS</u> P e D sono insiemi infiniti, quindi non posso

scrivere materialmente tutti gli elementi, però lo detto come elencarli

$P = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

→ $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

$D = \{2n+1 \text{ tale che } n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots -3, -1, 1, 3, 5 \dots\}$

<u>NOTAZIONE</u> tale che si indica con $:$ o con $|$

2° MODO DI DESCRIVERE UN INSIEME, È DESCRIVENDO UNA PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZA I SUOI ELEMENTI

Esempio S è l'insieme i cui elementi sono i numeri reali x tali che $x^2 = 4$.

× $S = \{ \underline{x \in \mathbb{R}} : x^2 = 4 \}$ USO UNA PROPRIETÀ

S è l'insieme degli appartenenti ad $\mathbb{R}$ tali che $x^2 = 4$

× $S = \{ -2, 2 \}$ DESCRITTO COME LISTA

Esempio $T = \{ x \in \underline{\mathbb{N}} : x^2 = 4 \} = \{ 2 \}$

$$R = \{ x \in \underline{\mathbb{Z}} : x^2 = 4 \} = S = \{-2, 2\}$$

È importante specificare di quali elementi si sta parlando

$$U = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 = 2 \} = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2} \}$$

$$V = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2 \} = \emptyset$$

l'insieme V non ha elementi

si dice che V è l'insieme vuoto

e si indica con $\emptyset$

Esempio $\quad W = \{ x \in \mathbb{R}$ tali che esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^2 = x \}$

Devo capire come è fatto W ma non lo vedo.

Mi pongo delle domande

$0 \in W$?

0 è un elemento di W se esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^2 = 0$.

SI ESISTE y, per esempio $y = 0$.

quindi $0 \in W$.

$1 \in W$?

1 è un elemento di W se esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^2 = 1$.

SI, ESISTE UN TALE y PER ESEMPIO $y = 1$

quindi $1 \in W$

$-1 \in W$?

-1 è un elemento di W se esiste $y \in \mathbb{R}$ tale che $y^2 = -1$

UN TALE y NON ESISTE

quindi $-1 \notin W$

W è l'insieme dei numeri maggiori o uguali a 0.

PRODOTTO DI DUE INSIEMI

Se A e B sono due insiemi e $a \in A$ e $b \in B$ possiamo considerare un nuovo elemento che si chiama la coppia il cui primo elemento è a e il secondo elemento è b e che si indica con (a, b).

Il prodotto di due insiemi che si indica con $A \times B$ è l'insieme di tutte le coppie.

$A = \{3, 7, 8\}$ $\quad$ $B = \{5, 9\}$

Chi sono le coppie

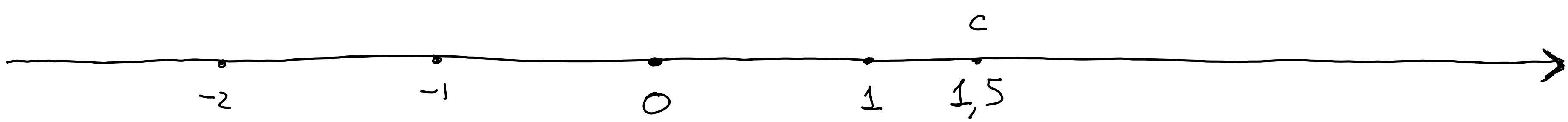
$$A \times B = \{(3,5), (3,9), (7,5), (7,9), (8,5), (8,9)\}$$

$$B \times B = \{(5,5), (5,9), (9,5), (9,9)\}$$

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali che sono tutti i numeri che si scrivono con la virgola.

Pensiamo $\mathbb{R}$ come i punti di una retta



una volta fissati sulla retta 0 e 1

Ogni numero reale corrisponde ad un punto della retta e viceversa.

La freccia indica la direzione positiva

INTERVALLI

SONO ALCUNI SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$ CHE SARANNO IMPORTANTI

SE $a, b \in \mathbb{R}$ e a è minore di b, scriviamo $\underline{a < b}$

DEFINIAMO

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b \}$$

L'intervallo chiuso dei numeri compresi tra a e b

[Ricordo $<$ vuol dire minore

$\leq$ vuol dire minore o uguale]

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}$$

intervallo aperto

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} : a \leq x < b \}$$

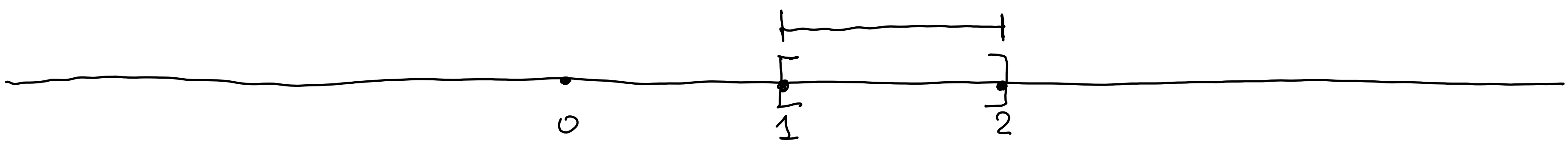
INTERVALLO CHIUSO A SINISTRA E APERTO A DESTRA

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} : a < x \leq b \}$$

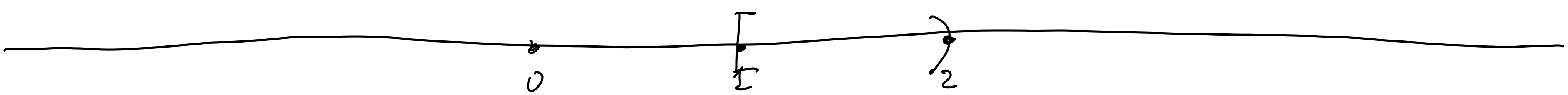
intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

Esempio

$a = 1 \qquad b = 2 \qquad [1, 2]$



$[1, 2)$



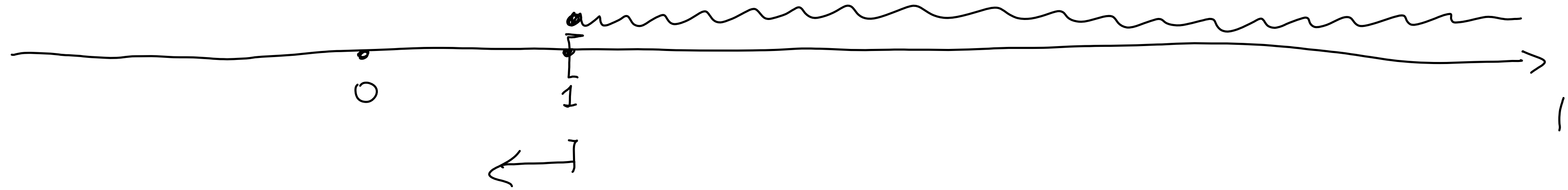
VARIANTE : SEMIRETTE (O ANCHE DI RETTE)

NELLE DIFINIZIONI PRECEDENTI POSSIAMO CONSIDERARE IL CASO IN CUI FISSIAMO SOLO UNO DEI DUE ESTREMI

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$ SEMIRETTA CHIUSA

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$ SEMIRETTA APERTA

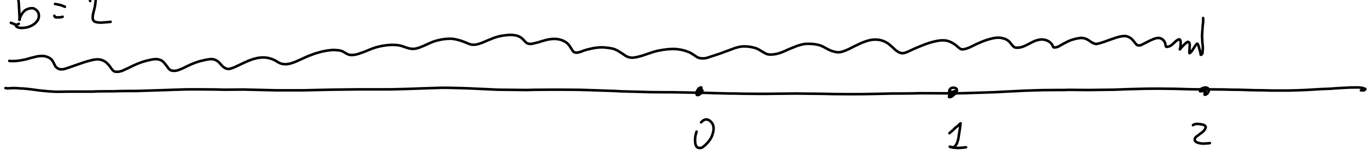
$e = 1$ $\quad [1$



$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq b \}$$

$$(-\infty ; b) = \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}$$

$b = 2$



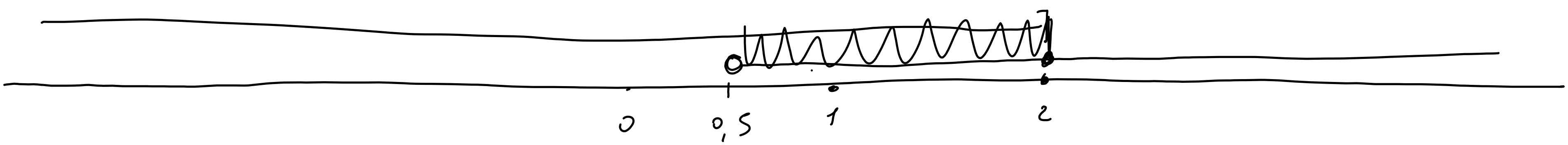
Esercizio

$(1, 2) = \,]1, 2[$

$(-\infty, 2] \cap (0{,}5, +\infty)$

$(-\infty, 2] = \{ x \in \mathbb{R} : \underline{x \leq 2} \}$

$(0{,}5, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : \underline{x > 0{,}5} \}$

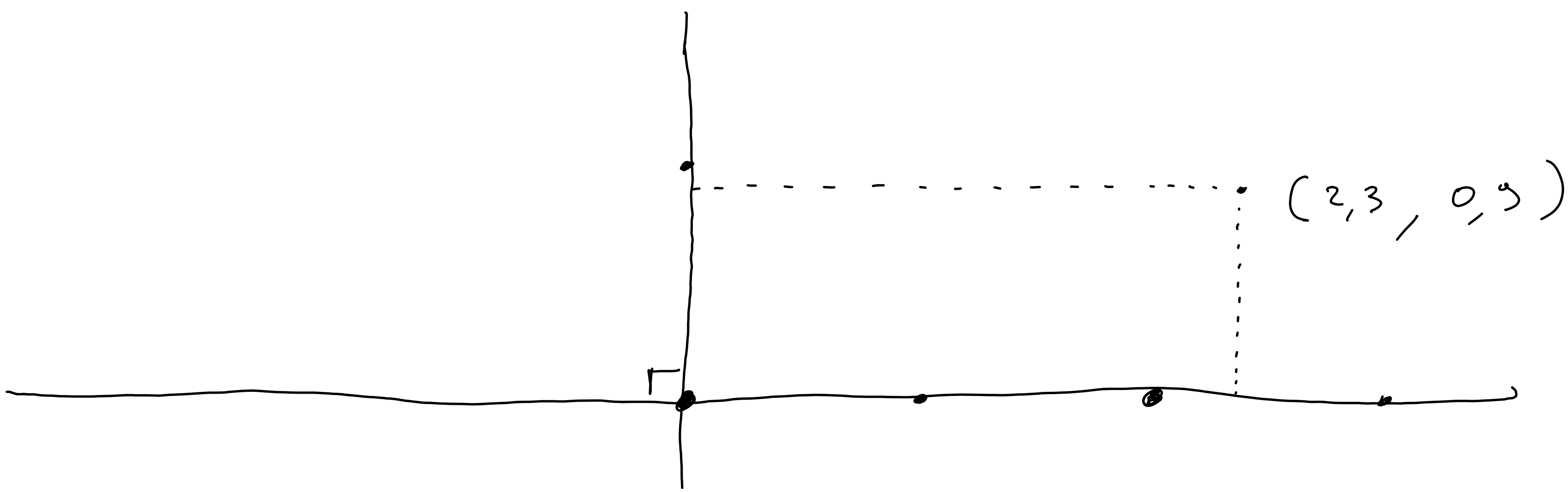


$(-\infty, 2] \cap (0{,}5, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : x \leq 2 \text{ e } x > 0{,}5 \}$

$$= \{ x \in \mathbb{R} : 0,5 < x \leq 2 \} = (0,5 , 2]$$

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (a, b) : a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R} \}$$

$\mathbb{R}^2$ lo possiamo pensare come i punti del piano.

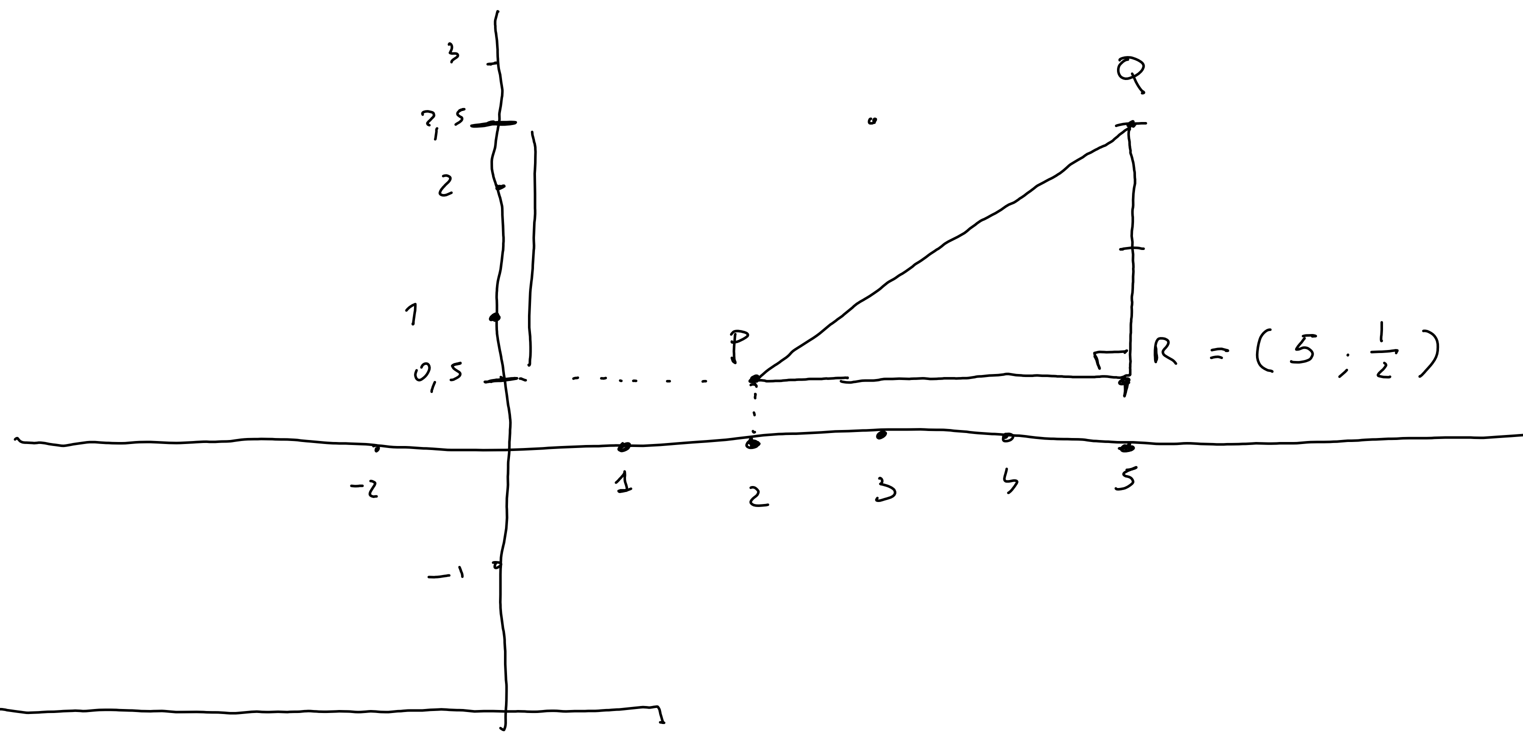


Una volta fissata un'origine e due assi ortogonali passanti per l'origine e una unità di misura ogni punto del piano corrisponde ad un elemento di $\mathbb{R}^2$ e viceversa.

DISTANZA TRA DUE PUNTI DEL PIANO

$P = (2, \frac{1}{2})$

$Q = (5, 2{,}5)$



$$\text{dist}(P,Q) = \sqrt{\text{dist}(P,R)^2 + \text{dist}(Q,R)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$