LEZIONE 27   19 FEB. 2022

PROBABILITÀ

EVENTI SEMPLICI EQUIPROBABILE

Esempio   Lancio di un dado

ci sono sei possibili risultati e ogni risultato esce con la stessa probabilità

Esempio   Se estraete una pallina da un sacchetto con 90 palline numerate, avete 90 possibili risultati ognuno con la stessa probabilità

Possiamo chiederci la probabilità di eventi più complicati, per esempio

PROBABILITÀ CHE LANCIANDO UN DADO ESCA UN NUMERO PARI. $\{2, 4, 6\}$

$$\frac{3}{6} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{eventi favorevoli} \\ \leftarrow \text{n° totale degli eventi} \end{matrix}$$

PROBABILITÀ CHE ESTRAENDO UN NUMERO DAL SACCHETTO CON 90 PALLINE ESCA UN n° divisibile per 7.

$$\frac{12}{90} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{n° eventi favorevoli} \\ \leftarrow \text{n° totale degli eventi} \end{matrix}$$

NEL CASO DI EVENTI SEMPLICI (BASILARI) EQUIPROBABILI

$$\text{PROBILITA DI UN EVENTO COMPOSTO} = \frac{\text{n° di eventi favorevoli}}{\text{n° totale degli eventi}}$$

EVENTI - PRODOTTO

Esempio Consideriamo il lancio della stessa moneta due volte.

TT TC CT CC

HO 4 POSSIBILI EVENTI SEMPLICI. SONO 4 EVENTI EQUIPROBABILI.

QUAL'È LA PROBABILITÀ CHE ESCA ALMENO UNA TESTA

Gli eventi favorevoli sono TT TC CT

$$\text{Prob. che esca almeno una testa} = \frac{3}{4}$$

- POSSIAMO ORGANIZZARE LA DESCRIZIONE DI QUESTA SITUAZIONE IN 2 ALTRI MODI

SCRIVENDO UNA TABELLA

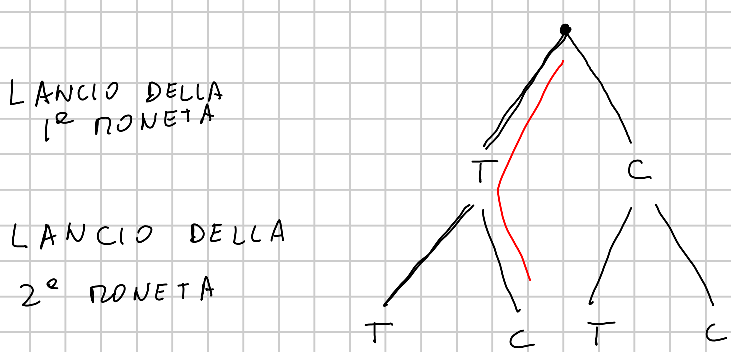
RISULTATO PRIMA ESTRAZIONE

RISULTATO DELLA SECONDA ESTRAZIONE

	T	C
T	TT	CT
C	TC	CC

LE ENTRATE DELLA TABELLA SONO I POSSIBILI RISULTATI DEL LANCIO DI 2 MONETA.

UN ULTERIORE MODO DI DESCRIVERE QUESTA SITUAZIONE È FACENDO UN GRAFO



TT TC CT CC

2° ESEMPIO

LANCIAMO DUE VOLTE UN DADO.

1,1 1,2 1,3 6,6

ABBIAMO 36 POSSIBILI RISULTATI

	1	2	3	4	5	6
1				×		
2			×			
3		×				
4	×					
5						
6						

PROBABILITÀ CHE LA SOMMA DEL RISULTATO DEI DUE LANCI SIA UGUALE A 5

1,4 2,3 3,2 4,1

LA PROBABILITÀ È $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

ESEMPIO

ABBIAMO 2 SACCHETTI IL PRIMO $\{A, B, C, E\}$

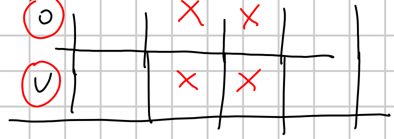
IL SACCHETTO $\{B, E, F, O, U\}$

ESTRAGGO UNA LETTERA DAL PRIMO SACCHETTO E UNA LETTERA DAL SECONDO

	A	B	C	E
B	AB	BB	..	
E		×	×	
F				

N° TOTALE DEGLI EVENTI POSSIBILI

È N° DELLE POSSIBILI



ESTRAZIONI DAL 1° SACCHETTO

×

N° DELLE POSSIBILI ESTRAZ.

DA 2° SACCHETTO.

$$4 \times 5 = \underline{\underline{20}}$$

OSSERVIAMO CHE LA PROBABILITÀ DI UN EVENTO SEMPLICE

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

LA PROBABILITÀ DI UN EV. SEMPLICE PER LA PRIMA ESTRAZIONE

LA PROBABILITÀ DI UN EV. SEMPLICE PER LA SECONDA ESTRAZ.

LA PROBABILITÀ CHE CON LA PRIMA ESTRAZIONE PESCO UNA CONSONANTE E CON LA SECONDA PESCO UNA VOCALE

A $\boxed{\text{B C}}$ E

B E F O U

RIS. FAV. 1° ESTRA

RIS. FAV. 2ª ESTRAZ.

$$2 \times 3$$

$$\frac{\text{EVENTI FAVOREVOLI SONO} = 6}{\text{EVENTI TOTALI SONO} = 20} = \frac{6}{20} =$$

$$= \frac{2 \times 3}{4 \times 5} = \frac{2}{4} \times \frac{3}{5}$$

PROBABILITÀ DI PESCARE UNA CONS. CON LA PRIMA EST.

PROB. DI PESCARE UNA VOCALE CON LA 2ª EST.

PROBABILITÀ DI OTTENERE DUE LETTERE CONSECUTIVE

NELL'ORDINE GIUSTO.

	A	B	C	E
B	X			
E				
F				X
O				
U				

LA SECONDA ESTRAZIONE È LA LETTERA CHE SEGUE IL RISULTATO DELLA PRIMA ESTRAZ.

ESEMPIO

SACCHETTO CON 90 PALLINE NUMERATE DA 1 A 90

ESTRAIAMO 2 PALLINE

PER ES. NON SI PUÒ ESTRARRE 5, 5.

EVENTI SEMPLICI NON EQUIPROBABILI

- ESEMPIO LANCIO DI UNA MONETA TRUCCATA O DI UN DADO TRUCCATO

- ESEMPIO

SUPPONIAMO DI AVERE 3 SACCHETTI

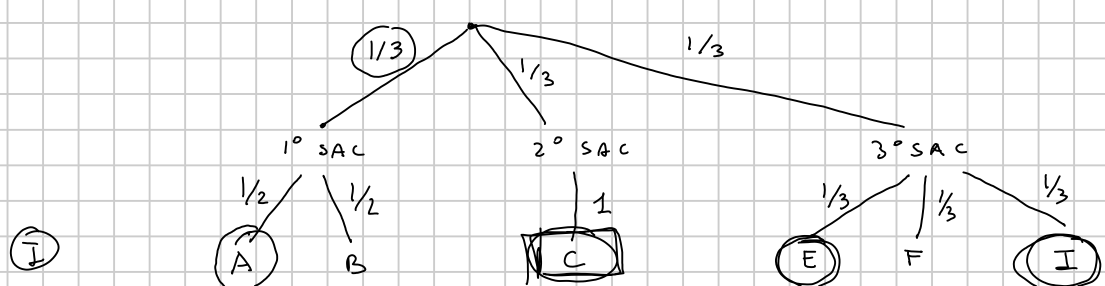
$1°$ SAC $= \{A, B\}$

$2°$ SAC $= \{C\}$

$3°$ SAC $= \{E, F, I\}$

SCEGLIAMO A CASO UN SACCHETTO

SCELTO IL SACCHETTO TIRIAMO FUORI UNA LETTERA



1/6 1/6 1/3 1/9 1/9 1/9

I 6 POSSIBILI EVENTI NON SONO EQUIPROBABILI

PROBABILITÀ DI OTTENERE UNA VOCALE (NON È $\frac{3}{6}$ ←)

= PROB DI OTTENERE A 1/6

+ PROB DI OTTENERE E 1/9

+ " " " I 1/9 $= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9+12}{54} = \frac{21}{54}$

$= \frac{7}{18}$

= PROB. DI OTTENERE B 1/6

+ C 1/3 $= \frac{11}{18}$

+ D 1/9

FORMALIZZAZIONE DEL CONCETTO DI PROBABILITÀ

(CASO DISCRETO)

Ω È UN INSIEME FINITO

(È L'INSIEME DEI POSSIBILI RISULTATI DEL NOSTRO ESPERIMENTO) SPAZIO DEGLI EVENTI

$P: \Omega \longrightarrow [0, 1]$ È UNA FUNZIONE

P SI CHIAMA PROBABILITÀ.

$\Omega = \{ e_1 ; e_2 ; \dots ; e_N \}$

$P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_N) = 1$

QUESTO È UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ

GLI ELEMENTI DI Ω SI CHIAMANO EVENTI SEMPLICI.

I SOTTOINSIEMI DI Ω SI CHIAMANO EVENTI COMPOSTI

SE $A \subset \Omega$ DEFINIAMO $A = \{ e_1 ; e_2 ; \dots ; e_k \} \subset \Omega$

$$\boxed{P(A)} = p(e_1) + p(e_2) + \dots + p(e_k)$$

QUESTA È LA PROBABILITÀ CHE L'EVENTO SEMPLICE CHE SI VERIFICA È UN ELEMENTO DI A, CHE CHIAMIAMO ANCHE LA PROBABILITÀ CHE SI VERIFICHI L'EVENTO COMPOSTO. A.

$$A = \emptyset \qquad P(\emptyset) = 0$$

$$A = \Omega \qquad P(\Omega) = p(a_1) + \dots + p(a_N) = 1.$$

RIVEDIAMO ALCUNI ESEMPI CHE ABBIAMO FATTO.

ES. 1 DADO LANCIO DI UN DADO

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$$

ES. 2 LANCIO DI DUE DADI (PRODOTTO)

$$\Omega = \{(1,1)\ (1,2) \dots\} = \Omega_1 \times \Omega_1 =$$

$$= \{(a, b) : \text{con } a \in \Omega_1 \text{ e } b \in \Omega_1\}$$

DEFINIZIONE DI SPAZIO PRODOTTO

SUPPONIAMO DI AVERE DUE SPAZI DI PROBABILITÀ

$$\Omega \qquad P: \Omega \longrightarrow [0,1]$$

$$\Omega' \qquad P': \Omega' \longrightarrow [0,1]$$

E COSTRUIAMO UN TERZO SPAZIO DI PROBABILITÀ CHE SI CHIAMA IL PRODOTTO

$$\Omega'' \qquad P'': \Omega'' \longrightarrow [0,1]$$

$\Omega'' = \Omega \times \Omega' = \{$ l'insieme delle coppie (a, b) in cui $a \in \Omega$, $b \in \Omega' \}$

$P''(a, b) = \underline{P(a)} \cdot \underline{P'(b)}$ QUESTO È UN NUMERO COMPRESO TRA 0 e 1

$P'' : \Omega'' \longrightarrow [0, 1]$

L'ALTRA CONDIZIONE CHE DEVO VERIFICARE È CHE LA SOMMA DI P'' SU TUTTI I POSSIBILI DEVE FARE 1.

$\Omega = \{ a_1, a_2 \}$ $\Omega' = \{ b_1, b_2, b_3 \}$

$$\Omega'' = \{ (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3) \}$$

$$\underline{P''(a_1, b_1)} + P''(a_1, b_2) + P''(a_1, b_3) + P''(a_2, b_1) + P''(a_2, b_2) + P''(a_2, b_3) =$$

$$= P(a_1) P'(b_1) + P(a_1) \cdot P'(b_2) + P(a_1) P'(b_3) + P(a_2) P'(b_1) + \cdots + P(a_2) P'(b_3) =$$

$$= P(a_1) \left(P'(b_1) + P'(b_2) + P'(b_3) \right) + P(a_2) \left(P'(b_1) + P'(b_2) + P'(b_3) \right) =$$

$$= \underbrace{\left(P(a_1) + P(a_2) \right)}_{= 1} \cdot \underbrace{\left(P'(b_1) + P'(b_2) + P'(b_3) \right)}_{= 1} =$$

$$= 1.$$