LEZIONE 21 DICEMBRE

ES. 75

$$\begin{cases} y'(t) = \boxed{t e^{t^2}} \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad y'$$

DOBBIAMO CALCOLARE LE PRIMITIVE DELLA FUNZIONE te^{t^2}

$$F(x) = \int_0^x t e^{t^2} \, dt \qquad \boxed{F'(x) = f(x) = x e^{x^2}}$$

$$t^2 e^t \qquad \boxed{y(1)=2}$$

$$\int_0^x t e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \underbrace{(2t)}_{g'} \underbrace{e^{t^2}}_{f(g(t))} dt$$

$$\int_a^b f(g(t)) \, g'(t) \, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(s) \, ds \qquad \frac{g(t) = t^2}{f(s) = e^s}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(x)} f(s) \, ds = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} e^s \, ds = \frac{1}{2} [e^s]_0^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} \qquad \text{verifica} \qquad F'(x) = x e^{x^2}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} = \frac{e-1}{2} \neq 2 \qquad \begin{cases} y'(x) = x e^{x^2} \\ y'(1) = 2 \end{cases}$$

$$y(x) = F(x) + C \qquad y'(x) = F'(x) = x e^{x^2}$$

$$y(1) = F(1) + C = \frac{e-1}{2} + C = 2$$

$$C = 2 - \frac{e-1}{2} = \frac{5-e}{2}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{5-e}{2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + 2 - \frac{e}{2}}$$

$$\int_1^x y'\,dt = \int_1^x t\,e^{t^2}\,dt = \dots$$

$$y(x) - y(1) = y(x) - 2$$

$$y(x) \neq \underbrace{\int_1^x t e^{t^2}\,dt}_{G(x)} + 2 \qquad G(1) = 0$$

ES. 76

$$\begin{cases} y'(t) = t\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

DIVIDIAMO PER $y(t)$ L'EQUAZIONE $y'(t) = t\,y(t)$ E OTTENGO

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = t$$

$y'(t)\quad f(y(t))$ QUI HO SOLO LA t

$$f(y) = \frac{1}{y}$$

$$\int_{g(0)}^{g(x)} \frac{1}{s}\,ds = \int_0^x \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt = \int_0^x t\,dt = \frac{1}{2}x^2$$

PER SOSTITUZIONE CON $g(t) = y(t)$ e $f(s) = \frac{1}{s}$

$$\left[\log s\right]_{y(0)=1}^{y(x)} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\log(y(x)) - \underbrace{\log 1}_{0} = \frac{1}{2}x^2$$

$$\log(y(x)) = \frac{1}{2}x^2$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}x^2}$$

RICORDO $\quad y'(t) = \alpha y(t) - \beta (y(t))^2$

$$y(t) = \frac{\alpha/\beta}{1 + C e^{-\alpha t}}$$

$$y(0) = y_0$$

ALLORA $$y(0) = \frac{\alpha/\beta}{1+C} = \boxed{y_0}$$

DA CUI $$\frac{\alpha}{\beta} = y_0 + C y_0$$

e quindi $$\frac{\alpha}{\beta} - y_0 = C y_0$$

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta y_0} - 1 = C}$$

ES. 32

$$\frac{dn}{dt} = n' = \underbrace{2\,10^{-5}}\, n(t)\left(\underbrace{5\ 10^{5}} - n(t)\right) =$$

$$= \underset{\alpha}{\underset{\|}{10}}\, n(t) - \underset{\beta}{\underbrace{2 \cdot 10^{-5}}}\,(n(t))^2$$

$$\alpha/\beta = \frac{10}{2\,10^{-5}} = 5 \cdot 10^5$$

$$n(t) = \frac{5 \cdot 10^5}{1 + C e^{-10t}}$$

$$n(0) = 10^4 \qquad \frac{5 \cdot 10^{\cancel{5}}}{1+C} = \cancel{10^4}\ 1 \qquad \begin{aligned} 1 + C &= 50 \\ C &= 59 \end{aligned}$$

$$\boxed{n(t) = \frac{5 \cdot 10^5}{1 + 59\, e^{-10t}}}$$

$$\boxed{y' = \underbrace{\alpha y - \beta y^2}}$$

$$\underset{\|}{\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{\alpha s - \beta s^2}\, ds} = \int_0^x \frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = \int_0^x 1 = x$$

$$\frac{1}{\alpha s - \beta s^2} = A\,\frac{1}{s} + B\,\frac{1}{\alpha - \beta s}$$

$$n(t) = \frac{5 \cdot 10^5}{1 + 49 e^{-10t}} \qquad \boxed{t \geq 0}$$

$\boxed{e^{-10t} \quad \text{è decrescente}}$.

$\underline{1 + 49 e^{-10t}}$ è decresc. e $\underset{\sim}{>0}$ $\qquad f \quad \frac{1}{f}$ è crescente.

$\frac{5 \cdot 10^5}{1 + 49 e^{-10t}}$ è crescente.

$n(t)$ ha il minimo per $t=0$ $\qquad n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$n(0) = 10^4$

non ha massimo.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{5 \cdot 10^5}{1 + 49 \underbrace{e^{-10t}}_{\downarrow 0}} = 5 \cdot 10^5$$

QUANDO È CHE LA FUNZIONE HA VALORE METÀ DI $5 \cdot 10^5$

$$n(t) = \frac{\cancel{5 \cdot 10^5}}{\underbrace{1 + 49 \cdot e^{-10t}}} = \frac{1}{2} \cancel{5 \cdot 10^5}$$

$$2 = 1 + 49 e^{-10t}$$

$$49 e^{-10t} = 1 \qquad e^{-10t} = \frac{1}{49}$$

$$-10t = \log_e \frac{1}{49}$$

$$t = -\frac{1}{10} \underbrace{\log_e \underbrace{\left(\frac{1}{49}\right)}} > 0.$$

$f > 0$ e f è decrescente allora $\frac{1}{f}$ è crescente

f 100 10 1 $\frac{1}{f}$ $\frac{1}{100}$ $\frac{1}{10}$ 1

$1 + 49 e^{-10t}$ $\frac{5 \cdot 10^5}{1+49 e^{-10t}}$ è crescente.

$$n(t) = \frac{5 \cdot 10^5}{\underbrace{1 + \underbrace{49}\, e^{-10t}}}$$

$$n'(t) = \frac{0 - 5 \cdot 10^5 \left(49 \cdot (-10) e^{-10t}\right)}{\left(1 + 49 e^{-10t}\right)^2} = \frac{\boxed{5 \cdot 49 \cdot 10^6}\,\boxed{e^{-10t}}}{\underbrace{\left(1 + 49 e^{-10t}\right)^2}} > 0$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- $y'(t) = f(t)$ CALCOLO DELLA PRIMITIVA DI f ⇝ CALCOLARE $\int f$
- $y'(t) = \alpha\, y(t)$
  $y'(t) = \alpha\, y(t) + \beta$ } SONO MOLTO SEMPLICI

ABBIAMO VISTO QUALCHE ALTRA EQUAZIONE DIFF. TUTTE DELLA FORMA

$$y'(t) = \underline{f(y(t))}\ \underline{g(t)}$$

es $y' = \alpha y - \beta y^2$ $\quad f(y) = \alpha y - \beta y^2$, $g(t) = 1$

$y' = t\, y$ $\quad f(y) = y \quad g(t) = t$

$y' = \tan(t)\,(1 + y^2)$

TUTTE QUESTE EQUAZIONI SI RISOLVONO CON LO STESSO TRUCCO: SI DIVIDE PER $f(y)$

$$\frac{y'}{f(y)} = g(t)$$

Es $\quad \frac{y'}{\alpha y - \beta y^2} = 1$

$$\underline{\int_{y(0)}^{y(x)} \frac{1}{f(s)}\,ds} = \int_0^x \frac{y'(t)}{f(y)}\,dt = \underline{\int_0^x g(t)\,dt}$$

SE SAPPIAMO FARE L'INTEGRALE SULLA SINISTRA E SULLA DESTRA "RICAVIAMO UNA FORMULA" PER Y.

* DUE COMPLICAZIONI ALG.

1ª CALCOLARE GLI INTEGRALI

2ª LA FORMULA PER Y CHE UNO RICAVA È IMPLICITA E NON È DETTO CHE SIA FACILE ESPLICITARLA

NOI CERCHIAMO DI FARE ESEMPI IN CUI IL ~~[illegible]~~ QUESTE DUE COMPLICAZIONI SONO "RAGIONEVOLI"

$y' = (\tan t)\, y \qquad y' = t y^2$

$\boxed{y' = \alpha y - \beta y^2}$ è già un po' al limite.

DA DOVE VENGONO FUORI QUESTE EQ. DIFFER.

$$y' = \alpha y - \beta y^2 \qquad y' = \alpha y$$

Es. 100

$$\int_1^t \frac{2 \log(x)}{x}\,dx = 2\int_1^t \frac{\log(x)}{x}\,dx$$

$g(x) = \log x$

$g'(x) = \frac{1}{x}$

$f(s) = s$

$$2\int_1^t \underbrace{g(x)}_{f(g(x))}\, g'(x)\,dx = 2\int_{g(1)}^{g(t)} s\,ds$$

$$= 2\cdot\int_0^{\log t} s\,ds = 2\,\frac{1}{2}\left[s^2\right]_0^{\log t}$$

$$= (\log(t))^2$$

105

$$f(x) = \frac{x^2}{\log(x)} \qquad f: (0,1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

b) Al variare di k determinare il n° delle soluzioni di $f(x) = k$

$$\boxed{\frac{x^2}{\log x} = k}$$

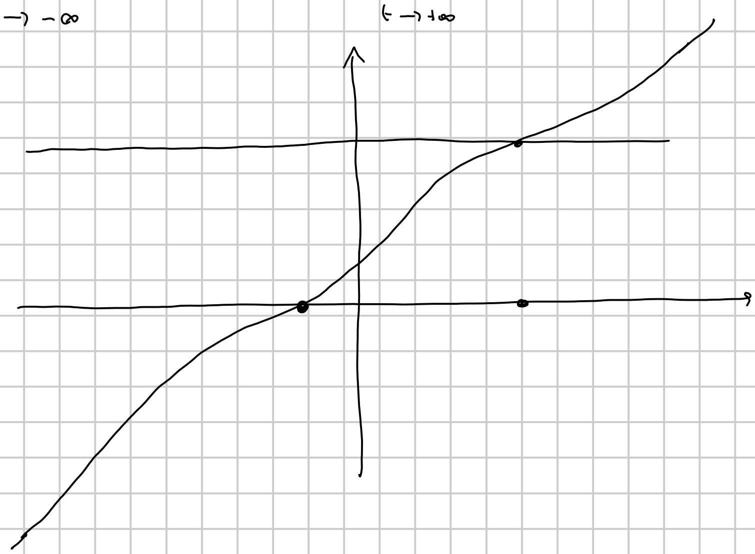
OSS

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente (continua)

e tale che $\lim_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$

$f(x) = 0$

$f(x) = 5$



f assume ogni valore una volta sola

OSS

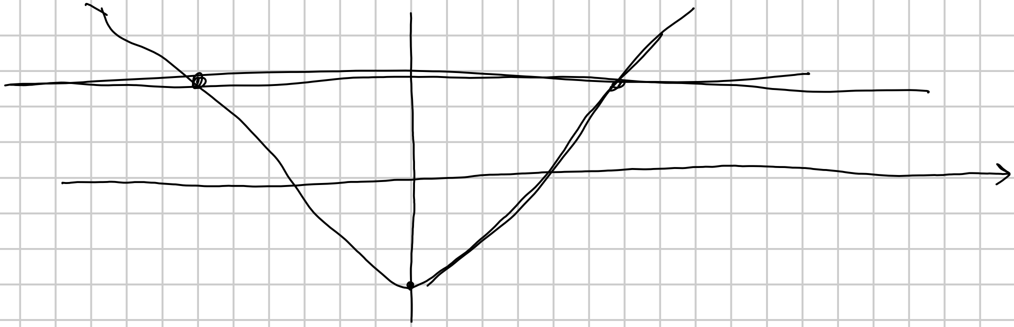
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (continua)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x) =$$

$f(0) = -3$

f è decrescente in $[-\infty, 0]$

f è crescente in $[0, +\infty)$



$f(x) = k$

$k < -3$	0
$k = -3$	1
$k > -3$	2

$$f(x) = \frac{x^2}{\log x}$$

$$f'(x) = \frac{2x \log x - \cancel{x^2}\,\frac{1}{\cancel{x}}}{(\log x)^2} = \frac{2\overset{\overset{0}{\wedge}}{x}\left(\log x - \frac{1}{2}\right)}{\boxed{(\log x)^2} > 0}$$

$f : (0, 1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f'(x) > 0$ se $\log x - \frac{1}{2} > 0$ $\quad x > e^{1/2}$

$f'(x) = 0$ se $\log x - \frac{1}{2} = 0$ $\quad \log x = \frac{1}{2}$ $\quad x = e^{1/2}$

$f'(x) < 0$ se $\log x - \frac{1}{2} < 0$ $\quad \underline{x < e^{1/2}}$

$e^{1/2} = \sqrt{e} = 1{,}6$ $\qquad \underline{(0, 1)} \cup (1 \ +\infty)$

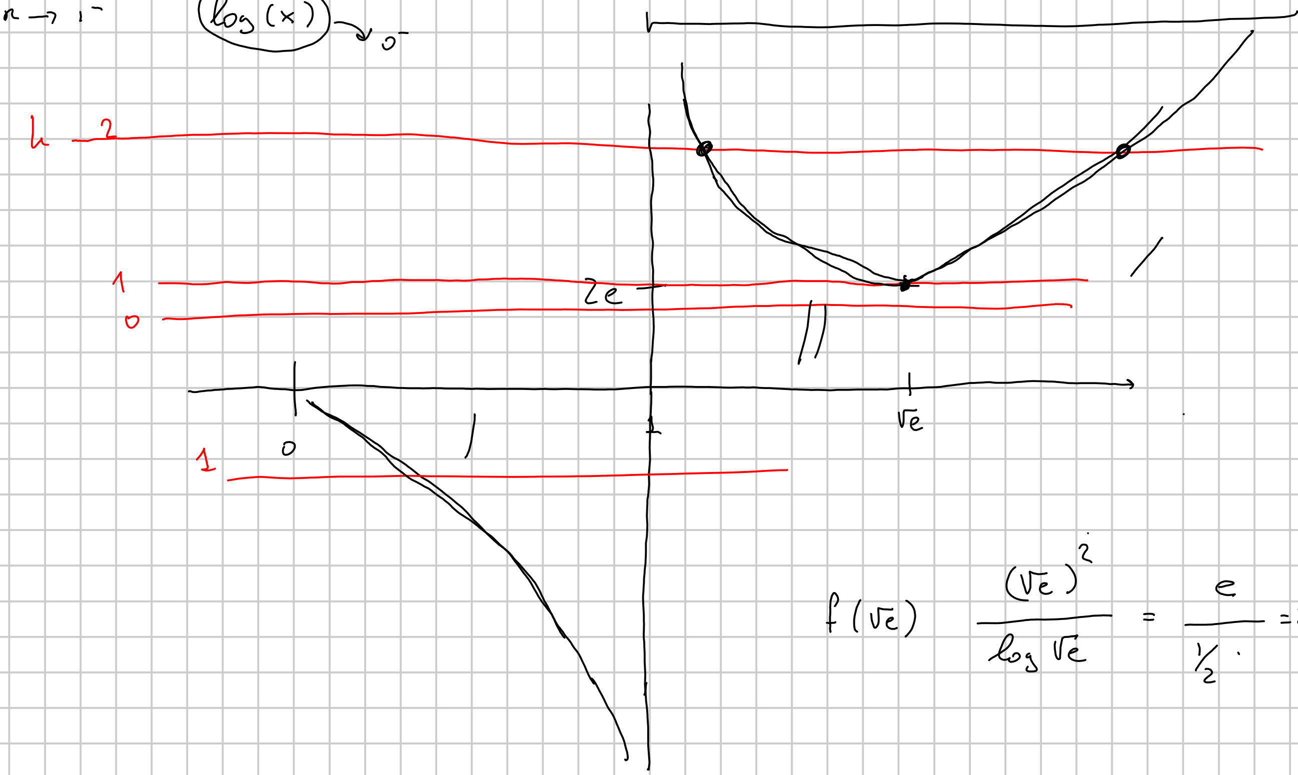
$f' < 0$ $\qquad \sqrt{e} \nearrow$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\log(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \to 0}{\log(x) \to -\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 \to 1}{\log(x) \to 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 \to 1}{\log(x) \to 0^-} = -\infty$$



$$f(\sqrt{e}) \quad \frac{(\sqrt{e})^2}{\log \sqrt{e}} = \frac{e}{1/2} = 2e$$

QUINDI SE $h > 2e$ $f(x) = h$ ha 2 soluz.

$h = 2e$ " ha 1 soluz.

$0 \leq h < 2e$ " ha 0 soluz.

$h < 0$ " ha 1 soluzione