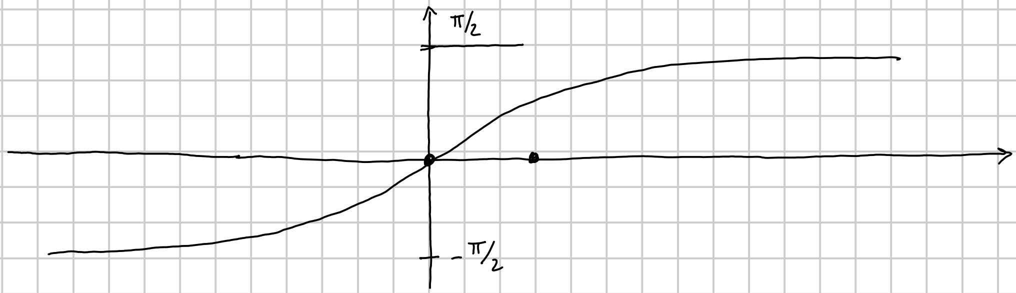
LEZIONE 13 DICEMBRE

ESERCIZIO 66

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che 1) f sia crescente

2) $f(1) = 0$

3) L'Immagine di $f = (-2, 2)$

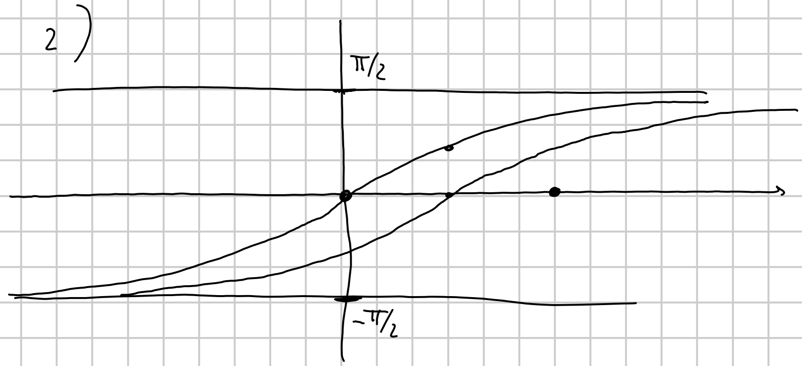


Se $g(x) = \operatorname{arctg}(x)$

$\frac{1}{1+x^2}$

- $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ $\quad g$ è crescente
- $g(0) = 0$ $\quad$ *
- $\operatorname{Im} g = \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ *

$(-2 ; 2)$



$h(x) = g(x-1)$

$\boxed{h(1) = g(0) = 0}$

$h(2) = g(1)$

- h è crescente
- $h(1) = 0$
- Immagine di $h = \left(-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Immagine di $h = \{ h(x)$ tale che $x \in \mathbb{R} \}$

$$\frac{2}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} \qquad \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{\pi}} \cdot \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} = 2$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x-1)$$

$$\operatorname{Im} h = (-1, 1)$$

$$f(x) = \lambda\, h(x)$$

$$\operatorname{Im} f = (-7; 7)$$

Se scelgo $\lambda = 7$ ottengo

$$7 = \frac{7}{1}$$

$$\operatorname{Im} h = (-3, 3)$$

$$\operatorname{Im} f = (-7; 7)$$

$$f = \frac{7}{3} h$$

$$\operatorname{Im} h = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{Im} f\ (-2, 2)$$

$$\frac{2}{\pi/2}$$

$y(t)$

$$* \quad \begin{cases} y'(t) = \alpha\, y(t) - \beta\, y(t)^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{\alpha/\beta}{1 - C e^{-\alpha t}}}$$

$$y_0 \qquad \frac{\alpha}{\beta}$$

$$f(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

- f è positiva $\quad f(t) > 0$ per ogni t.

  perché numeratore e denominatore sono positivi

- f è crescente

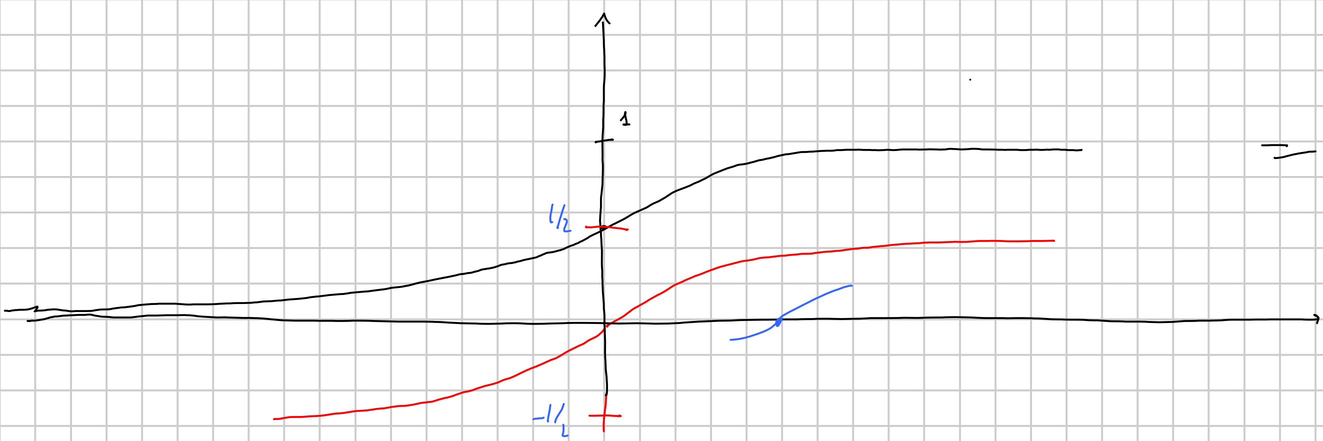
Infatti la funzione e^{-t} è decrescente quindi al crescere di t il denominatore decresce e quindi f cresce.

- $\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{1 + \underset{\downarrow \atop 0}{e^{-t}}} = \frac{1}{1} = 1$

- $\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{1 + \underset{\downarrow \atop +\infty}{e^{-t}}} = 0$

$f(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

e^5 e^6 2



- f è crescente *
- $\text{Im } f = (0, 1)$] $-\frac{1}{2}$ *
- $f(0) = \frac{1}{2}$]

$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$

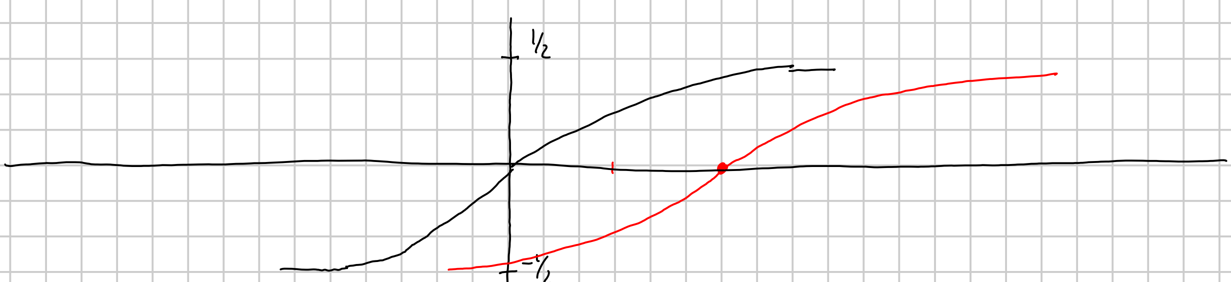
- g è crescente
- $\text{Im } g = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $g(0) = 0$.

X

$(-2, 2)$

$h(1) = 0$

$g(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}} - \frac{1}{2}$



- g è crescente
- $g(0) = 0$
- Immagine di $g = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

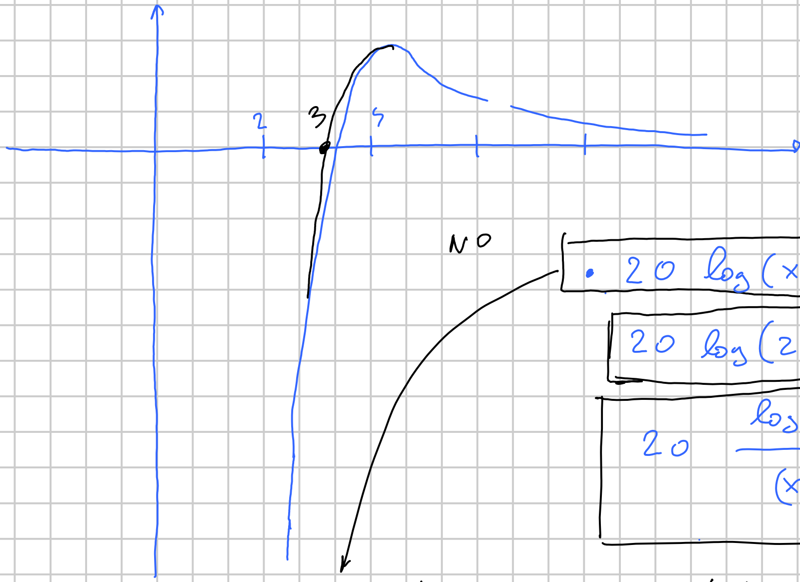
$h(x) = g(x-1)$

- h è crescente
- $h(1) = g(0) = 0$
- $\text{Im } h = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

$k(x) = 4\,h(x) = 4\,g(x-1) = 4\left(\dfrac{1}{1+e^{-(x-1)}} - \dfrac{1}{2}\right) =$

$\dfrac{1}{1+c\,e^{-x}}$

ESERCIZIO 67



$f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$

NO

$\boxed{20 \log(x-2)}$ è crescente e per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$.

$\boxed{20 \log(2-x)}$

$\boxed{20\,\dfrac{\log(x-2)}{(x-1)^2}}$

$\boxed{20\,\dfrac{\log(x-2)}{x-4}}$ per $x = 4$ non è definita.

L'unica possibile è $f(x) = 20\,\dfrac{\boxed{\log(x-2)}}{(x-1)^2}$

Segno di f. Per $x > 2$ il denominatore è > 0.

Segno di f è uguale al segno di $\log(x-2)$

$\log(y) > 0 \quad y > 1$ $\qquad \log(x-2) > 0 \quad x-2 > 1 \quad x > 3$

$\log(y) = 0 \quad y = 1$ $\qquad = 0 \quad x = 3$

$\log(y) < 0 \quad 0 < y < 1$ $\qquad < 0 \quad 2 < x < 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 20\,\dfrac{\boxed{\log((x-2))}}{\underbrace{(x-1)^2}} = -\infty.$

$x-2 \to 0^+$, $\log \to -\infty$

$(2-1)^2 = 1$

$\boxed{y = x-2}$ $\quad y+1 = x-1$

$y+2 = x$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 20 \, \frac{\log((x-2))}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{y \to +\infty} 20 \, \boxed{\frac{\log y}{(y+1)^2}} \to 0$$

$+\infty$ $+\infty$

0 perchè il logaritmo tende a $+\infty$ più lentamente di ogni polinomio.

$$z = \log y \qquad y = e^z$$

$$= \lim_{z \to +\infty} 20 \, \frac{z}{(e^z+1)^2} =$$

$$= \lim_{z \to +\infty} 20 \, \frac{z}{\boxed{e^{2z} + 2e^z + 1}} =$$

$$= \lim_{z \to +\infty} 20 \, \frac{z}{e^{2z}} \, \frac{1}{1 + 2e^{-z} + e^{-2z}} = 0$$

$20 \to 20$, $\quad \frac{z}{e^{2z}} \to 0$, $\quad e^{-z} \to 0$, $\quad e^{-2z} \to 0$

$$\frac{1}{1+2e^{-z}+e^{-2z}} \to \frac{1}{1} = 1.$$

$$\frac{1}{e^z} \to 0 \qquad \frac{z}{e^z} \to 0$$

perchè e^z tende a $+\infty$ più velocemente di ogni polinomio, in particolare del polinomio z.

MODELLO DI DIFFUSIONE DI UN VIRUS (S.I.R.)

Abbiamo un virus che si diffonde in una popolazione.

S = suscettibili = chi non ha ancora preso il virus

$S(t)$

I = infetti = chi è infetto al tempo t.

$I(t)$

R = guariti = chi il virus l'ha già avuto.

- SUPPONIAMO CHE CHI HA AVUTO IL VIRUS UNA VOLTA NON LO POSSA RIAVERE

- CHI È INFETTO PUÒ DIFFONDERE IL VIRUS.

- N = n° di persone medio con cui viene in contatto una persona nell'unità di tempo
- α = probabilità che in un contatto ~~il~~ virus passi da una persona all'altra.

β = probabilità che la persona a cui viene passato il virus sia suscettibile, ovvero sia una persona che non ha ancora avuto il virus.

- 1ª IPOTESI

$$S(t) + I(t) + R(t) = T$$ = popolazione totale non dipende da t.

β = la probabilità che la persona a cui è stato trasmesso il virus sia suscettibile. $\boxed{\dfrac{S(t)}{T}}$

$$\beta(t) = \frac{S(t)}{T}$$

$$\underbrace{NI}_{\text{n° di contatti delle persone infette}} \cdot \alpha \cdot \frac{S}{T} = \frac{N\alpha}{T} \cdot I \cdot S = A\, I(t)\, S(t)$$

QUESTO È IL NUMERO DI PERSONE INFETTATE AL TEMPO t

$$\boxed{S' = -A S \cdot I}$$

COME CAMBIA R(t)

SUPPONIAMO CHE UNA CERTA PERCENTUALE (CHE NON DIPENDE DAL TEMP.) DEGLI INFETTI GUARISCA. PER ESEMPIO SE LA MALATTIA IN MEDIA DURA 5 GIORNI, POSSIAMO IPOTIZZARE CHE PIÙ O MENO OGNI GIORNO $\frac{1}{5}$ DEGLI INFETTI GUARISCA

$$R' = \underbrace{B I}_{\text{GLI INFETTI CHE GUARISCONO}}.$$

$$\boxed{R' = BI}$$

$$\begin{cases} S' = -ASI \\ R' = BI \end{cases}$$

COME VARIA I

I' = NUOVI INFETTI − PERSONE CHE GUARISCONO

$$= ASI - BI$$

$$\boxed{\begin{cases} S' = -ASI \\ I' = ASI - BI \end{cases}}$$

$R' = BI$

NON SI SCRIVE LA SOLUZIONE

- SI POSSONO FARE DELLE SIMULAZIONI NUMERICHE.
- SI POSSONO FARE DELLE CONSIDERAZIONI

$S, I, R \geq 0$

- $S + I + R = T$ = costante.

OSSERVAZIONE: LE EQUAZIONI CHE ABBIAMO SCRITTO SONO COMPATIBILI CON QUESTA IPOTESI

$$(S + I + R)' = S' + I' + R'$$

$$= -A\cancel{S}I + A\cancel{S}I - \cancel{B}I + \cancel{B}I = 0$$

- 2nd oss. $S, I \geq 0$ $\quad S' = -ASI \leq 0$

S è decrescente (non crescente)

$R' = BI \geq 0$

R è crescente.

S è decrescente e compreso tra 0 e T

ESISTE $\lim_{t \to +\infty} S(t) = S_\infty \qquad 0 \leq S_\infty \leq T$

ESISTE $\lim_{t \to +\infty} R(t) = R_\infty \qquad 0 \leq R_\infty \leq T$

$I = T - S - R \qquad \lim_{t \to +\infty} I(t) = T - S_\infty - R_\infty = I_\infty$

$$R' = B I$$

PER t MOLTO GRANDE

$$0 = B I_\infty$$

$$\boxed{I_\infty = 0}$$

R è crescente

e $\lim R(t) = \underline{R_\infty}$