LEZIONE 16 NOVEMBRE

ES. 47

$$f(x) = \frac{x^2}{\log_e x}$$

la formula ha senso per $x > 0$, altrimenti il logaritmo non è definito e $\log_e x \neq 0$ ovvero per $x \neq 1$ altrimenti stiamo dividendo per 0.

$$f : (0,1) \cup (1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per capire quando f è crescente calcolo $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{D(x^2) \log x - x^2 D(\log x)}{(\log x)^2} = \frac{2x \log x - x^2 \frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{2x \log x - x}{(\log x)^2}$$

Determino il segno della derivata il segno di $f'(x)$ è uguale al segno di $2x \log x - x = x(2 \log x - 1)$

Nel dominio della funzione $x > 0$ quindi il segno di $f'(x)$ è uguale al segno $2 \log x - 1$

$$2 \log x - 1 > 0$$

se e solo se

$$\log x > \frac{1}{2}$$

se e solo se

$$x > \sqrt{e}$$

$f'(x) > 0$ per $x > \sqrt{e}$ $\quad f$ è

$f'(x) = 0$ per $x = \sqrt{e}$

$f'(x) < 0$ per $x < \sqrt{e}$

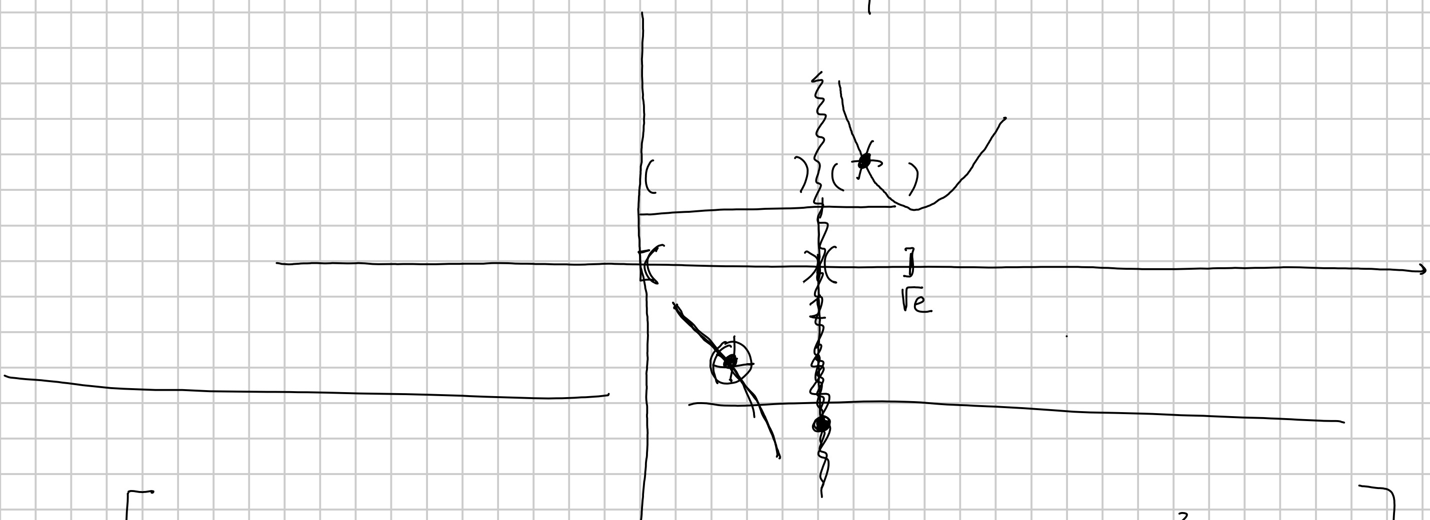
f è crescente nell'intervallo $[\sqrt{e}, +\infty)$

estremo incluso

f non è decrescente in $(0, \sqrt{e}]$

f è decrescente in $(0, 1)$

e f è decrescente in $(1, \sqrt{e}]$



OSSERVIAMO CHE PER $0 < x < 1$ $f(x) = \dfrac{x^2}{\underline{\log x}} < 0$

PER $1 < x$ $f(x) > 0$

ES. 48

$$f(x) = e^{x^2-6x-7}$$

DETERMINARE GLI INTERVALLI NEI QUALI f È CRESCENTE

- I MODO

$f'(x)$ $\qquad x \longrightarrow y = \underline{x^2-6x-7} \qquad \underline{y \longrightarrow e^y}$

$$f'(x) = (2x-6)\, e^y = (2x-6)\cdot e^{x^2-6x-7}$$

STUDIO IL SEGNO DI $f'(x)$

IL SEGNO DI $f'(x)$ È UGUALE AL SEGNO DI $(2x-6)$

PERCHÉ L'ESPONENZIALE È SEMPRE POSITIVO

$$2x - 6 > 0$$

SE E SOLO SE

$$2x > 6$$

OVVERO

$$x > 3$$

QUINDI $f'(x) > 0$ PER $x > 3$

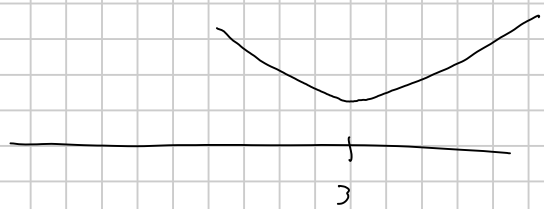
$f'(x) = 0$ PER $x = 3$

$f'(x) < 0$ PER $x < 3$

NELL'INTERVALLO $[3; \infty)$ f è crescente

" $(-\infty; 3]$ f è decrescente

IN PARTICOLARE 3 È UN PUNTO DI MINIMO.



II MODO

e^x È UNA FUNZIONE CRESCENTE

e^{x^2-6x-7} È CRESCENTE NEGLI INTERVALLI IN CUI $x^2 - 6x - 7$ È CRESCENTE

$$x^2 - 6x - 7 = g(x)$$

$f(x) = e^{g(x)}$ $e^{g(x_1)} < e^{g(x_2)}$

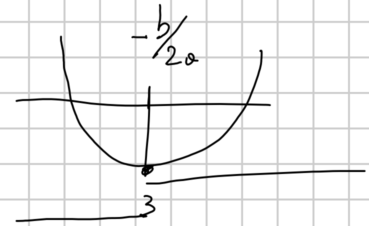
OSS $f(x_1) < f(x_2)$ SE E SOLO SE $g(x_1) < g(x_2)$

(QUI USO IL FATTO CHE e^x È CRESCENTE)

QUINDI INVECE DI STUDIARE DOVE LA FUNZIONE $f(x)$ È CRESCENTE STUDIO DOVE $g(x)$ È CRESCENTE

$$g(x) = x^2 - 6x - 7$$

$$\frac{-(-6)}{2} = 3$$

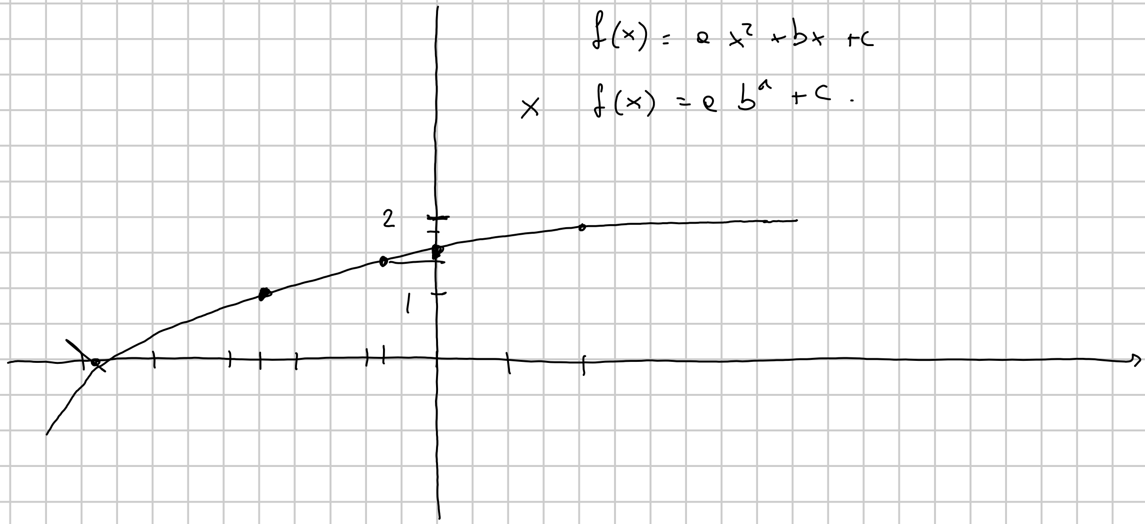


ES. 49

$f(x) = ax + b$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

× $f(x) = a b^x + c$.



POICHÉ IL GRAFICO NON È QUELLO DI UNA RETTA O DI UNA PARABOLA SIAMO NEL TERZO CASO

$$f(x) = a b^x + c$$

C È FACILE DA DETERMINARE

Se $b > 1$ $\lim_{x \to +\infty} a b^x = \begin{cases} +\infty & a > 0 \\ -\infty & a < 0 \end{cases}$

Se $0 < b < 1$ $\lim_{x \to +\infty} a b^x = 0$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$$

OSSERVO CHE IL GRAFICO SUGGERISCE CHE $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

QUINDI $0 < b < 1$ E $c = 2$

ORA UTILIZZIAMO $f(0) = 1,5$ $a \underbrace{b^0}_{=1} + 2 = 1,5$

$f(-2,5) = 1$ $a b^{-2,5} + 2 = 1$

$a = -0,5$

$-0,5\, b^{-2,5} + 2 = 1$ $-\frac{1}{2} b^{-2,5} = -1$

$b^{-2,5} = 2$

$b^{2,5} = \frac{1}{2}$

$b^{5/2} = \frac{1}{2}$

$b = \left(b^{5/2}\right)^{2/5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2/5} =$

CALCOLATRICE.

$f : [0, \infty) \longrightarrow [2, \infty)$

$f(x) = e^x + \underline{e^{-x}}$

1° $f(x) \geq 2$ per ogni x

$f(0) = e^0 + e^0 = 2$

$f'(x) = e^x - e^{-x} = \underline{e^x - \frac{1}{e^x}} > 0$ per $x > 0$.

$x > 0$ $y > 1$

$y - \frac{1}{y} > 0$ $\frac{1}{y} \leq 1 \leq y$

QUINDI f È CRESCENTE QUINDI IL MINIMO È IN $x=0$.

2° $f : [0, +\infty) \longrightarrow [2, +\infty)$ è bigettiva

X Y

DEVO VERIFICARE CHE PER OGNI $y \in [2, +\infty)$

ESISTE UN UNICO x IN $[0, +\infty)$ TALE CHE $\underline{f(x) = y}$

$$e^x + e^{-x} = y$$

$$e^{2x} + 1 = y e^x$$

$$e^{2x} - y e^x + 1 = 0$$ SE PONGO $u = e^x$

$x \geq 0$ $\quad u \geq 1$

$$u^2 - yu + 1 = 0$$

QUINDI $u = \dfrac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$ $\quad \Delta = y^2 - 4 \geq 0$ PERCHÉ $y \geq 2$

$$\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2} \geq \frac{2+0}{2} = 1$$

$$\boxed{\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \geq 1}$$?

$$y - \sqrt{y^2-4} \geq 2$$

$$\underline{(y-2)} \geq \underline{\sqrt{y^2-4}}$$

È EQUIVALENTE A

$$\cancel{y^2} - \overset{1}{\cancel{4}}y + \overset{1}{\cancel{4}} \geq \cancel{y^2} - \overset{1}{\cancel{4}}$$

$$-y + 1 \geq -1$$ $\boxed{2 \geq y}$ NON VA BENE

PER NOI $\underline{y \geq 2}$

$$e^x = u = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$$ $$\boxed{x = \log\left(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\right)}$$

INTEGRALI

Se $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ (CONTINUA)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

X $\displaystyle\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

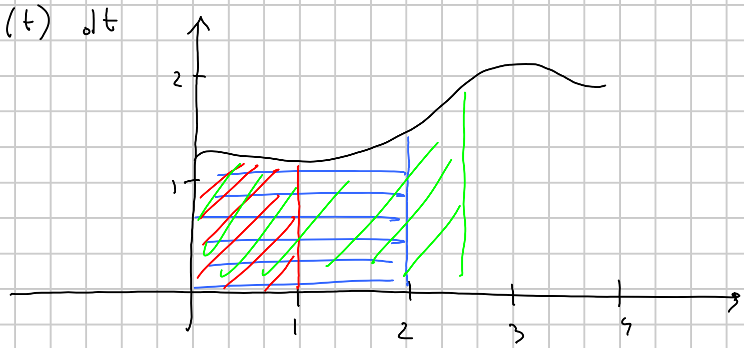
X $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

X $f \geq g \qquad \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad a \in \mathbb{R} \qquad a = 0 \qquad f$ continua

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



$a = 0$

$F(1)$ = AREA ROSSA

$F(2)$ = AREA BLU

$F(2,5)$ = AREA VERDE.

$$F'(x) = f(x)$$

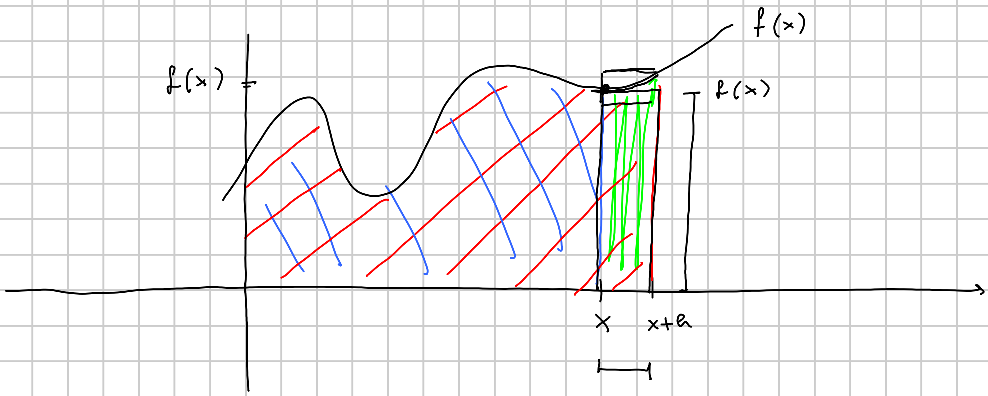
ESEMPIO

$$F(x) = \int_0^x e^t + \sqrt{1 + (\cos t)^2}\;dt$$

$$F'(x) = e^x + \sqrt{1 + (\cos x)^2}$$

"DIMOSTRAZIONE"

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{\cancel{x}+h - \cancel{x}} = \boxed{\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}}$$



$$F(x+h) - F(x) = \text{AREA VERDE}$$

$$= \underline{h\, f(x) + h\, \underbrace{\text{errore}_h}_{\to 0}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(f(x) + \underbrace{\text{errore}_h}_{\to 0} \right) = f(x)$$

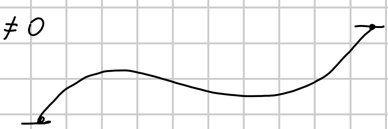
#

<u>PROPOSIZIONE</u>

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Se $f'(x) = 0$ per ogni x allora $f(x)$ è una costante.

SE f NON FOSSE COSTANTE CI SAREBBE ALMENO UN PUNTO IN CUI $f'(x) \neq 0$



CONSEGUENZA

SE $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \underline{f' = g'}$ ALLORA ESISTE UNA COSTANTE C E $f(x) = g(x) + C$.

DIM. $h = f - g \qquad h' = f' - g' = 0$

PER LA PROPOSIZIONE $h = C \qquad f = g + C$

#

$$\boxed{\int_3^5 \underline{x^3 \quad dx}}$$

$$F(x) = \int_3^x t^3 \, dt \qquad \boxed{F(5) = \int_3^5 t^3 \, dt}$$

$$F'(x) = x^3$$

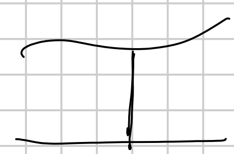
Se $\boxed{G(x) = \frac{1}{4} x^4}$ $\qquad G'(x) = \cancel{\frac{1}{4}} \cancel{4} x^3 = x^3$

QUINDI $\underline{F' = G'}$

ALLORA $F(x) = G(x) + C$

$$\int_3^x t^3 \, dt = F(x) = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$0 = \int_3^3 t^3 \, dt = F(3) = \frac{1}{4} 3^4 + C$$



QUINDI $C = -\frac{1}{4} 3^4$

$$F(x) = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{4} 3^4$$

$$\int_3^5 t^3 \, dt = \boxed{F(5) = \frac{1}{4} 5^4 - \frac{1}{4} 3^4}$$