NUMERI NATURALI, INTERI, RAZIONALI, REALI

Ci aspettiamo che abbiate familiarità con i seguenti insiemi di numeri e le loro proprietà:

$\mathbb{N}$: l'insieme dei numeri naturali: $0, 1, 2, \dots$

$\mathbb{Z}$: l'insieme dei numeri interi: $\dots -1, 0, 1, 2 \dots$

$\mathbb{Q}$: l'insieme dei numeri razionali, ovvero delle frazioni $\frac{a}{b}$ con a, b interi e $b \neq 0$

$\mathbb{R}$: l'insieme dei numeri reali, ovvero di tutti i numeri con la virgola, anche non periodici.

Se andiamo a scrivere una frazione come un numero con la virgola otteniamo sempre un numero periodico e viceversa un numero periodico si può scrivere sempre come una frazione.

Esercizio Scrivere $\frac{180}{37}$ come numero con la virgola.

$$
\begin{array}{lll}
180 & \big| & 37 \\
148 & & \overline{4{,}891} \\
\boxed{330} & & \\
296 & & \\
340 & & \\
333 & & \\
70 & & \\
37 & & \\
\boxed{330} & &
\end{array}
$$

da qui in poi il calcolo si ripete uguale

quindi otteniamo $4,\overline{891}$

Esercizio Scrivere $11,3\overline{57}$ come frazione

Sia $x = 11,3\overline{57}$ allora

$$
\begin{array}{rcl}
100x & = & 1135,757\,57\ldots \quad - \\
x & = & 11,357\,57\ldots \quad = \\
\hline
99x & = & 1124,400\ldots
\end{array}
$$

da cui

$$x = \frac{1124,4}{99} = \frac{11244}{\cancel{990}} = \frac{3748}{330} = \frac{1874}{165}$$

INSIEMI

QUELLO CHE CI ASPETTIAMO SAPPIATE DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI SONO ALCUNI CONCETTI E COSTRUZIONI DI BASE. OLTRE A QUESTO CI ASPETTIAMO CHE ABBIATE QUALCHE FAMILIARITÀ CON ALCUNE NOTAZIONI E CHE SAPPIATE DESCRIVERE UN INSIEME

- CONCETTI E NOTAZIONI FONDAMENTALI

  - appartenenza $\in$: $x \in A$ vuol dire che l'elemento x appartiene all'insieme A.
  - contenimento $\subset$: $A \subset B$ vuol dire che l'insieme A è contenuto nell'insieme B ovvero che ogni elemento di A è anche un elemento di B. Si può anche scrivere $B \supset A$.
    NOTA BENE quando scrivo $A \subset B$ può anche essere $A = B$. Si dice anche A è un sottoinsieme di B
  - $\forall$ è un'abbreviazione per "per ogni"
  - $\exists$ è un'abbreviazione per "esiste"
  - $\exists_1$ o $\exists!$ è un'abbreviazione per "esiste un unico"
  - $:$ o $|$ è un'abbreviazione per "tale che"
  - $\emptyset$ è l'insieme vuoto. È un insieme che non ha elementi
  - $card(A)$ indica la cardinalità di un insieme, ovvero il numero degli elementi di un insieme

<u>NOTA</u>: <u>Non</u> è che se scrivete $\forall$ allora state facendo matematica e se scrivete "per ogni" non state facendo matematica. Le due cose sono perfettamente intercambiabili e anzi invito chi non si sente sicuro ad utilizzare la forma estesa. È bene però che acquisiate un po' di familiarità con questa simbologia perché io la userò a lezione e la troverete usata nella maggior parte dei libri.

DESCRIVERE UN INSIEME

UN INSIEME SI PUÒ DESCRIVERE ESSENZIALMENTE IN DUE MODI.

PRIMO MODO: SE NE POSSONO ELENCARE GLI ELEMENTI. PER ESEMPIO POSSIAMO DIRE CHE

A È L'INSIEME I CUI ELEMENTI SONO 1, 2, 3

UN MODO EQUIVALENTE È SCRIVERE

$$A = \{1, 2, 3\}$$

LE RIPETIZIONI E L'ORDINE NON CONTANO QUINDI ABBIAMO ANCHE

$$A = \{1, 3, 1, 2\}$$

A VOLTE UTILIZZEREMO QUESTO METODO IN MODO IMPROPRIO. PER ESEMPIO SCRIVEREMO

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

PER INDICARE TUTTI I NUMERI INTERI MAGGIORI O UGUALI A UNO. UNA ULTERIORE VARIANTE SI PRESENTA NEL SEGUENTE MODO

$$C = \{3m + 1 : m \in A\}$$

$$D = \{m^2 - 4m + 4 : m \in A\}$$

$$E = \{2m : m \in B\}$$

SONO ALTRI ESEMPI DI MODI PER ELENCARE GLI ELEMENTI DI UN INSIEME. NEGLI ESEMPI

$$C = \{4, 7, 10\}$$

$$D = \{0; 1\}$$

E È L'INSIEME DEI NUMERI PARI POSITIVI

SECONDO MODO: SI PUÒ DESCRIVERE UN INSIEME FORNENDO UNA PROPRIETÀ CHE CARATTERIZZA I SUOI ELEMENTI, PER ESEMPIO POSSIAMO DIRE CHE F È L'INSIEME DEI NUMERI CHE RISOLVONO L'EQUAZIONE $x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0$.

$$F = \{ x : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

CON UNA FORMA PIÙ COMPLETA E PIÙ CORRETTA, MA NOI USEREMO ENTRAMBE, SI POSSONO SPECIFICARE A CHE TIPO DI NUMERI FACCIAMO RIFERIMENTO

$$G = \{ x \in \mathbb{R} : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

$$H = \{ x \in \mathbb{N} : x^7 + x^5 + 3x^3 + 2 = 0 \}$$

IN GENERALE SIA I UN INSIEME E $P(x)$ UNA PROPOSIZIONE DELLA QUALE POSSIAMO VALUTARE LA VERITÀ SUGLI ELEMENTI DI I, OVVERO UNA FRASE CHE DIPENDE DA UNA VARIABILE x E CHE SE AL POSTO DI x METTIAMO UN ELEMENTO DI I POSSIAMO DIRE SE LA FRASE È VERA. PER ESEMPIO SIA $I = \mathbb{N}$ E SIA $P(x)$ LA FRASE

$x+1$ È UN NUMERO PRIMO

PER ESEMPIO

$P(5)$ È FALSA

$P(12)$ È VERA

ALLORA POSSIAMO DEFINIRE L'INSIEME DEGLI ELEMENTI DI I CHE HANNO LA PROPRIETÀ P CHE SI SCRIVE

$$J = \{ x \in I : P(x) \}$$

FACCIAMO DUE PICCOLE OSSERVAZIONI:

1) BASTA SCRIVERE $P(x)$ NON C'È BISOGNO DI SCRIVERE $P(x)$ È VERA
2) SPESSO L'INSIEME I NON LO SPECIFICHEREMO

ESEMPI

UN INSIEME PUÒ AVERE DESCRIZIONI DIVERSE

1) $$K = \{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0 \}$$

$$L = \{ 1, 2 \}$$

ANCHE SE LA DESCRIZIONE DI L È DIVERSA DA QUELLA DI K, I DUE INSIEMI SONO UGUALI

PER CAPIRE COME È FATTO L'INSIEME K RISOLVIAMO $x^2 - 3x + 2 = 0$

$$\Delta = 9 - 8 = 1 \qquad x = \frac{3 \pm 1}{2} < \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}$$

QUINDI ANCHE

$$K = \{ 1, 2 \}.$$

IN PARTICOLARE $L = K$.

2) SE DEFINIAMO

$$M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^4 + x^2 + 1 = 0 \}$$

È UN MODO UN PÒ COMPLICATO DI DIRE $M = \emptyset$
INFATTI PER $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 + x^2 + 1 \geq 1$$

E QUINDI $x^4 + x^2 + 1 = 0$ NON HA SOLUZIONE.

MOLTI ESERCIZI CONSISTONO PROPRIO NEL PASSARE DA UNA DESCRIZIONE DEL SECONDO TIPO AD UNA DEL PRIMO TIPO. PER ESEMPIO RISOLVERE UN'EQUAZIONE, COME ILLUSTRA L'ESEMPIO DI K E L VUOL DIRE PASSARE DA UNA DESCRIZIONE MEDIANTE UNA PROPRIETÀ AD UNA DESCRIZIONE MEDIANTE UNA LISTA COME ABBIAMO FATTO SOPRA PER K e L, DA

$$K = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

A $K = \{1, 2\}$.

ESEMPIO Capire come sono fatti i seguenti insiemi

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tale che } x = y^2\}$$

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, \quad x = y^2\}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y \in \mathbb{R}, \quad x = xy^2\}$$

Q è l'insieme dei numeri reali che sono il quadrato di un numero reale quindi

$$Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

R è l'insieme dei numeri x tali che

$$x = y^2 \quad \text{per ogni } y$$

ma questo vuol dire in particolare

$$x = 0^2 = 1^2$$

che è impossibile. Quindi

$$R = \emptyset$$

$S = \{0\}$. Per far vedere questo devo far vedere che 0 è l'unico numero che ha la proprietà richiesta.
Come prima cosa faccio vedere che se $x \in S$ allora $x = 0$. Infatti se $x \in S$ allora $x = x y^2$ per ogni y e in particolare per $y = 0$ otteniamo $x = x \cdot 0^2 = 0$.
quindi se $x \in S$ allora $x = 0$.
viceversa se $x = 0$ allora l'equazione

$$0 = 0 \cdot y^2$$

è vera per ogni y e quindi $0 \in S$

Come mostra questo esempio l'uso dei quantificatori (per ogni, esiste) rende subito le cose più complicate. Per esperienza per molti studenti questo è un problema

Esercizio

Sia X l'insieme di tutte le persone.

Ci si faccia una idea dei seguenti insiemi

$$A = \{ x \in X : \exists\, y \in X \text{ tale che } x \text{ e } y \text{ sono amici} \}$$

$$B = \{ x \in X : \forall\, y \in X,\ x \text{ e } y \text{ sono amici} \}$$

$$C = \{ x \in X : \forall\, y \in X,\ x \text{ sa dell'esistenza di } y \}$$

$$D = \{ x \in X : \exists\, y \in X \text{ tale che } x \text{ sa dell'esistenza di } y \}$$

NOTA: "sa dell'esistenza" non è, forse, per tutti chiaro cosa significhi. Io so dell'esistenza di Biden, ma non credo proprio Biden sappia della mia esistenza

Si provi a capire le relazioni di inclusione tra questi insiemi, per esempio, se $A \subset B$.

OPERAZIONI TRA INSIEMI

DATI DEGLI INSIEMI POSSIAMO COSTRUIRNE DI NUOVI MEDIANTE LE SEGUENTI OPERAZIONI.

$\cup$ = UNIONE
$\cap$ = INTERSEZIONE
$\setminus$ = DIFFERENZA
$\times$ = PRODOTTO (PER QUESTO VEDI LA PROSSIMA SEZIONE)

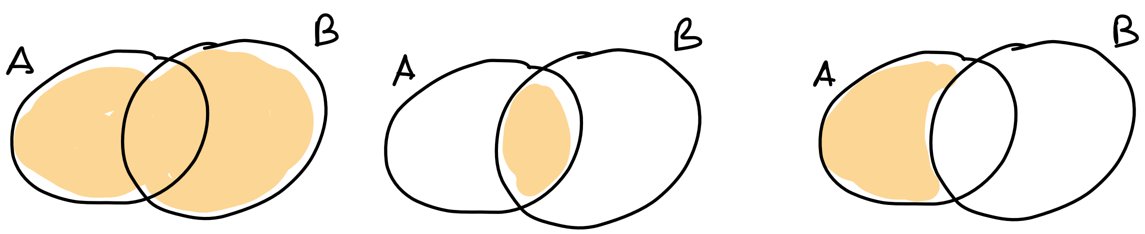
SE A E B SONO DUE INSIEMI

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \in B \}$$

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ e } x \notin B \}$$

L'ULTIMO DEI TRE SI LEGGE "A SENZA B".
È FACILE E MOLTO UTILE RAPPRESENTARE QUESTI INSIEMI GRAFICAMENTE



$A \cup B$ $A \cap B$ $A \setminus B$

OSSERVAZIONE

Se $A \cap B = \emptyset$ (si dice che A e B sono disgiunti) allora

$$\mathrm{card}(A \cup B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

In generale però questo non è vero. Per esempio se

$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{2, 3, 5\}$

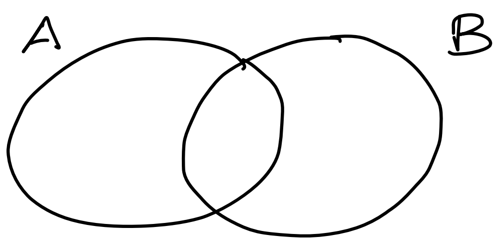
allora $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

e non è vero che $4 = 3 + 3$.

In generale vale la seguente formula

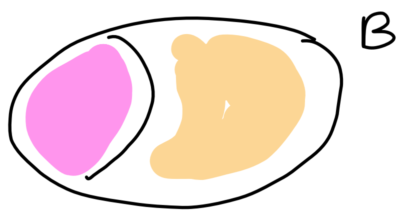
$$\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$$

<u>dim.</u>



concentriamoci prima su B.

$$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A)$$



e inoltre $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$

quindi

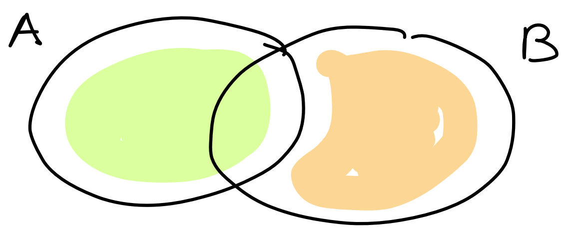
$$\mathrm{card}\, B = \mathrm{card}(B \setminus A) + \mathrm{card}(B \cap A).$$

da cui

$$\mathrm{card}\, B \setminus A = \mathrm{card}\, B - \mathrm{card}(B \cap A)$$

Ora osserviamo che

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A)$$



e che $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$. Quindi

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B \setminus A)$$

se sostituisco la formula trovata prima per $\text{card}(B \setminus A)$ ottengo

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}\, A + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cap B$$

da cui ricavo la tesi #

Esercizio

In una classe ogni studente gioca a calcio o a pallavolo.

15 giocano a calcio
10 " a pallavolo
5 " né a calcio che a pallavolo

quanti sono gli studenti?

A = { studenti che giocano a calcio }
B = { " " " pallavolo }
$A \cap B$ = { " " a calcio e a pallavolo }

$A \cup B$ è tutta la classe

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}\, B - \text{card}\, A \cap B$$
$$= 15 + 10 - 5$$
$$= 20$$

#

PRODOTTO TRA INSIEMI

DEFINIAMO ORA IL PRODOTTO TRA INSIEMI

DEFINIZIONE

SE A E B SONO DUE INSIEMI ALLORA UNA COPPIA ORDINATA DI A E B È UNA ESPRESSIONE DELLA FORMA

$$(a, b)$$

CON a UN ELEMENTO DI A E b UN ELEMENTO DI B.

L'INSIEME PRODOTTO $A \times B$ È L'INSIEME DI TUTTE LE POSSIBILI COPPIE.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$$

PIÙ IN GENERALE SE HO n INSIEMI $A_1, A_2 \dots A_n$ POSSO DEFINIRE UNA n-UPLA ORDINATA DI $A_1, A_2 \dots A_n$ COME UNA ESPRESSIONE

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

con $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ È IL PRODOTTO $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ COME L'INSIEME DELLE n-UPLE ORDINATE:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

ESEMPIO

$A = \{1, 2, 3\}$ $\qquad$ $B = \{3, 4\}$

Allora gli elementi di $A \times B$ sono

$(1, 3)$ $\quad$ $(2, 3)$ $\quad$ $(3, 3)$

$(1, 4)$ $\quad$ $(2, 4)$ $\quad$ $(3, 4)$

OSSERVAZIONE

$$\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \cdot \text{card}(B)$$

dim

Sia

$$A = \{1, 2, 3, \dots a\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots b\}$$

Elenchiamo gli elementi di A lungo le colonne e quelli di B lungo le righe e le coppie come qui sotto

$B \backslash A$	1	2	3	4	...	a
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)			(a,1)
2	(1,2)	(2,2)				(a,2)
3						

$b \quad (1,b) \quad (2,b) \quad \ldots \quad (a,b)$

In questo modo ho elencato tutte le coppie. Quindi ho $a \cdot b$ coppie.

#

INTERVALLI

Particolarmente importanti per noi saranno alcuni sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ sono due numeri con $a \leq b$ indichiamo con

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

sono i numeri compresi tra a e b, estremi inclusi. Questo si chiama l'intervallo chiuso di estremi a e b. Ci sono alcune varianti di questa definizione

- intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

- intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

- intervallo aperto

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Utilizziamo i simboli $+\infty$ e $-\infty$ per indicare, usando lo stesso formalismo alcuni sottoinsiemi illimitati di $\mathbb{R}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
- $(-\infty ; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty ; a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$