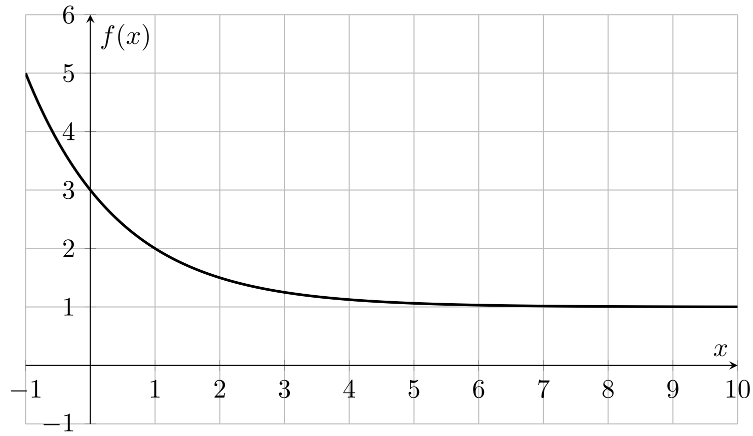
COMPITINO DEL 9 FEBBRAIO 2022

Avete 2:30 ore di tempo a disposizione. Motivate le vostre risposte. Sarà valutata anche l'esposizione e non saranno corretti esercizi illeggibili. Non si possono usare libri, appunti, calcolatrici, cellulari, pena l'annullamento del compito.

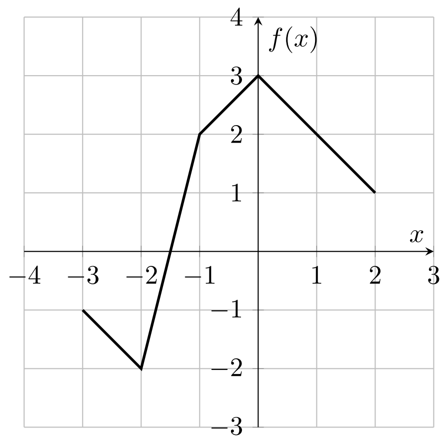
Esercizio 1. La funzione f ha una delle seguenti espressioni analitiche

$$f(x) = ax + b \qquad f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f(x) = ab^x + c \qquad f(x) = a\frac{1}{x+b} + c$$

per opportuni valori dei numeri a, b, c.l Sapendo che il grafico di f è il seguente, determinare f.



Esercizio 2. La funzione $f : [-3, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ ha il seguente grafico:



Sia $g : [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = f(-x) + 2$.

a) Risolvere l'equazione $f(x) = 2$;
b) Determinare punti di massimo e minimo della funzione f;
c) Disegnare un grafico accurato della funzione g.

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^2 e^{-2x}.$$

Si determinino eventuali punti di massimo e minimo locale di f. Si dica se si stratta di punti di massimo e minimo.

Esercizio 4. Si determini l'area compresa tra l'asse delle x, le rette $x = 1$ e $x = 2$ e il grafico della funzione $f(x) = xe^x$.

Esercizio 5. Sia $m(t)$ la massa di una colonia di batteri (la massa è espressa in grammi e il tempo in giorni).

a) La colonia di batteri vive indisturbata nel suo ecosistema dove dispone di risorse illimitate. Ogni batterio ha più o meno lo stesso peso. indipendentemente da quanto tempo è in vita e ad ogni istante una certa percentuale fissata di batteri si riproduce. In questo modo la massa della colonia aumenta e il suo incremento è proporzionale alla massa stessa. Sapendo che in un giorno la massa della colonia raddoppia si scriva l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione della massa $m(t)$.

b) Un'ameba viene introdotta nell'ecosistema dove vive la colonia di batteri. L'ameba si nutre dei batteri della colonia, senza mai fare pause e in modo costante, consumandone 1 grammo in un giorno. Si scriva l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione della massa $m(t)$ dopo l'introduzione dell'ameba.

(scusate lo scarso realismo biologico di questo esercizio)

Soluzioni del compitino del 9 febbraio 2021

Soluzione esercizio 1. Il grafico della funzione sicuramente non è né una retta né una parabola quindi la funzione è del terzo o del quarto tipo. Il grafico suggerisce inoltre che che f abbia limite uguale a 1 per x che tende a più infinito. Da questa condizione sia nel terzo che nel quarto caso otteniamo che $c = 1$.

Se supponiamo che siamo nel terzo caso otteniamo quindi che f è della forma

$$f(x) = ab^x + 1$$

Per determinare a, b osserviamo che $f(0) = 3$ e che $f(1) = 2$. Otteniamo quindi le equazioni

$$a + 1 = 3 \quad ab + 1 = 2$$

da cui $a = 2$ e $b = 1/2$. Quindi la funzione cercata è

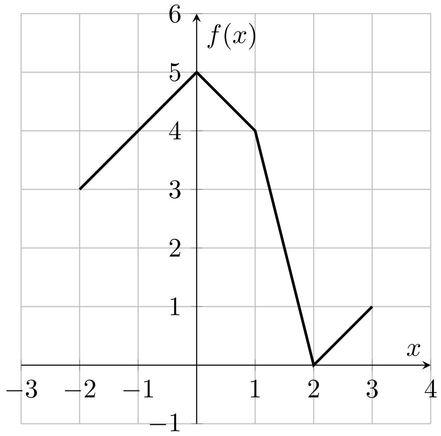
$$f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1.$$

Se invece si ipotizzasse che siamo nel quarto caso allora otterremmo che $c = 1$ e dalle condizioni $f(0) = 3$ e $f(1) = 2$ otterremmo che $a = 2$ e $b = 1$. Ma una tale funzione non sarebbe definita per $x = -1$ mentre la nostra funzione per $x = -1$ vale 5.

Soluzione esercizio 2. a) Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 2$ sono $x = -1$ e $x = 1$.

b) La funzione ha massimo nel punto $x = 0$ e ha minimo nel punto $x = -2$.

c) Il grafico della funzione g è il seguente



Soluzione esercizio 3. La funzioen è sempre maggiore o uguale a zero, e $f(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. In particolare $x = 0$ è un punto di minimo. Inoltre $\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \infty$ e quindi la funzione non può avere punti di massimo perché assume valori grandi a piacere.

Determiniamo ora se ci sono altri punti di massimo o minimo locale. Calcoliamo la derivata. Otteniamo

$$f'(x) = (2x - 2x^2)e^{-2x} = 2(1 - x)xe^{-2x}$$

In particolare ricaviamo che

- per $x < 0$, la derivata $f'(x)$ è negativa,
- per $0 < x < 1$, la derivata $f'(x)$ è positiva,
- per $x > 1$, la derivata $f'(x)$ è negativa

In particolare ricaviamo che $x = 1$ è un ulteriore punto di massimo locale.

Soluzione esercizio 4. Dobbiamo calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 xe^x \, dx = [xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x \, dx = [xe^x - e^x]_1^2 = e^2 \; .$$

Soluzione esercizio 5. a) L'equazione che esprime il fatto che la massa aumenta in modo proporzionale a se stessa è la seguente:

$$m'(t) = \alpha\, m(t)$$

la cui soluzione generale è $Ke^{\alpha t}$. Dal fatto che in un giorno la massa raddoppia ricaviamo che

$$K\, e^{\alpha(t+1)} = m(t+1) = 2m(t) = 2\, K\, e^{\alpha\, t}$$

da cui $e^{\alpha} = 2$ ovvero $\alpha = \log_e 2$. Quindi l'equazione che regola l'evoluzione di $m(t)$ è

$$m'(t) = \big(\log_e 2\big)\, m(t).$$

b) Possiamo esprimere la derivata di m come il risultato di due processi, uno che ne aumenta la massa e l'altro che la diminuisce.

$$m'(t) = A(t) - B(t)$$

Il primo, dovuto alla riproduzione dei batteri, l'abbiamo già determinato nel punto precedente dove abbiamo ottenuto che $A = \big(\log_e 2\big)\, m(t)$. Il secondo è dovuto al fatto che l'ameba mangia una parte dei batteri. La quantità che viene mangiata dall'ameba in ogni istante è sempre la stessa quindi $B(t)$ non dipende dal tempo e

$$m'(t) = \big(\log_e 2\big)\, m(t) - B$$

con B una costante. Poiché in un giorno ($t = 1$) la quantità mangiata dall'ameba è pari a un grammo abbiamo che $B = 1$. Quindi l'equazione differenziale che regola l'evoluzione della massa in questo caso è:

$$m'(t) = \big(\log_e 2\big)\, m(t) - 1.$$