# COMPITO DI ARITMETICA
19 luglio 2018

**1.** Sia $n$ un intero positivo e sia $A = \{1, \dots, 100\}$.

(a) Quante sono le terne ordinate $(x, y, z) \in A^3$ tali che $x < y < z$?

(b) Quante sono le terne ordinate $(x, y, z) \in A^3$ tali che $x < y < z$ e $z = x + y$?

**2.** Sia $a$ un parametro intero che soddisfa la condizione $(a, 9) = 3$. Determinare, al variare del parametro $a$, il numero di soluzioni dell'equazione $x^a \equiv -1 \pmod{19}$.

**3.** Sia $G$ un gruppo finito di ordine $n$, non necessariamente abeliano.

Per ogni intero positivo $d$ definiamo $H^{(d)}$ come il sottogruppo di $G$ generato dall'insieme $S^{(d)} = \{x^d \mid x \in G\}$.

(a) Dimostrare che $H^{(d)}$ è un sottogruppo normale di $G$ per ogni $d \geq 1$.

(b) Determinare tutti i possibili indici $[G : H^{(2)}]$ al variare di $G$ fra tutti i gruppi di ordine finito.

(c) Supponiamo che $6 \mid n$. Dimostrare che $S^{(2)} \cap S^{(3)} = \{e\}$ se e solo se per tutti gli elementi di $x \in G$ si ha $\mathrm{ord}(x) \mid 6$.

**4.** Sia $g(x) = x^5 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ e sia $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ una radice di $g(x)$ diversa da 1. Sia inoltre $L$ il campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$ del polinomio $f(x) = x^5 - 3$.

(a) Determinare il grado di $L$ su $\mathbb{Q}$.

(b) Determinare il polinomio minimo di $\zeta_5 + \zeta_5^{-1}$ su $\mathbb{Q}$.

(c) Determinare un intero $n$ tale che $\sqrt{n}$ appartenga ad $L \setminus \mathbb{Q}$.