COMPITO DI ARITMETICA
15 gennaio 2018

1. Sia $a_0, a_1, \dots, a_n \dots$ la successione definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1} \text{ per } n \geq 1\,. \end{cases}$$

(a) Determinare una formula esplicita per la successione $a_0, a_2, a_4, \dots, a_{2n}, \dots$ e determinare dei coefficienti r, s per i quali $a_{2n+2} = ra_{2n} + sa_{2n-2}$.

(b) Dimostrare che per ogni numero primo p esistono un intero $k > 0$ ed un intero n_0 tali che per cui $a_{n+k} \equiv a_n \pmod p$ per ogni $n \geq n_0$.

2. (a) Per ogni numero primo $p > 2$ sia $S(p)$ l'insieme degli interi n che soddisfano la congruenza $n \cdot 2^n \equiv 1 \pmod p$. Dimostrare che se a è un elemento di $S(p)$ e $b \equiv a \pmod{p(p-1)}$, allora $b \in S(p)$.

(b) Determinare il numero di soluzioni del sistema $S : \begin{cases} n \cdot 2^n \equiv 1 \pmod{31} \\ 1 \leq n \leq 930 \end{cases}$

3. (a) Siano G un gruppo e H, K due sottogruppi normali di G. Supponiamo che $H \cap K = \{e\}$: dimostrare che per ogni $h \in H$ e ogni $k \in K$ si ha $hkh^{-1}k^{-1} = e$.

(b) Sia p un numero primo. Determinare tutti i gruppi finiti G con la seguente proprietà: ogni elemento di G (tranne l'identità) ha ordine p, e per ogni $g \in G \setminus \{e\}$ si ha che $\langle g \rangle$ è normale in G, con $G/\langle g \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

4. (a) Sia n un numero naturale. Determinare, al variare di k fra i numeri interi positivi, il grado $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2^k}) : \mathbb{Q}]$.

(b) Dimostrare che, per ogni numero primo p, il grado d del campo di spezzamento di spezzamento di $f(X) = X^4 - 2$ sul campo $\mathbb{F}_p$ è un divisore di 4.

(c) Per ogni divisore d di 4, dare un esempio di un numero primo p per cui il grado del campo di spezzamento è uguale a d.