COMPITO DI ARITMETICA

12 febbraio 2018

1. Siano n un intero positivo maggiore di 1 e $X = \{1, \dots, n\}$.

(a) Determinare il numero delle funzioni $f\colon X \to X$ tali che l'immagine di f abbia esattamente 2 elementi.

(b) Determinare il numero delle funzioni $f\colon X \to X$ tali che l'immagine di $f \circ f$ contenga esattamente $n-1$ elementi.

2. Determinare per quali valori del parametro $a \in \mathbb{N}$ il seguente sistema ammette soluzione:

$$(S)\ :\begin{cases} x^2 \equiv 2^a \pmod{13^5} \\ x^a + a^3 + a \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

3. Siano G un gruppo abeliano di cardinalità $2^a \cdot 3^b$, denotato additivamente, dove a e b sono numeri naturali positivi. Siano inoltre G_2, G_3 i sottogruppi di G definiti da

$$G_2 = \{x \in G \mid 2^a x = 0\}, \qquad G_3 = \{x \in G \mid 3^b x = 0\}.$$

(a) Dimostrare che $G \cong G_2 \times G_3$.

(b) Dimostrare che, se G_2 può essere generato da h elementi e G_3 può essere generato da k elementi, allora G può essere generato da $M = \max\{h, k\}$ elementi.

4. Consideriamo il polinomio $f(x) = x^6 - x^3 - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.

(a) Determinare il grado del campo di spezzamento L di $f(x)$ su $\mathbb{F}_3$.

(b) Detta $\alpha \in L$ una radice di $f(x)$, determinare, al variare di k fra gli interi positivi, il grado dell'estensione $[\mathbb{F}_3(\alpha^k) : \mathbb{F}_3]$.