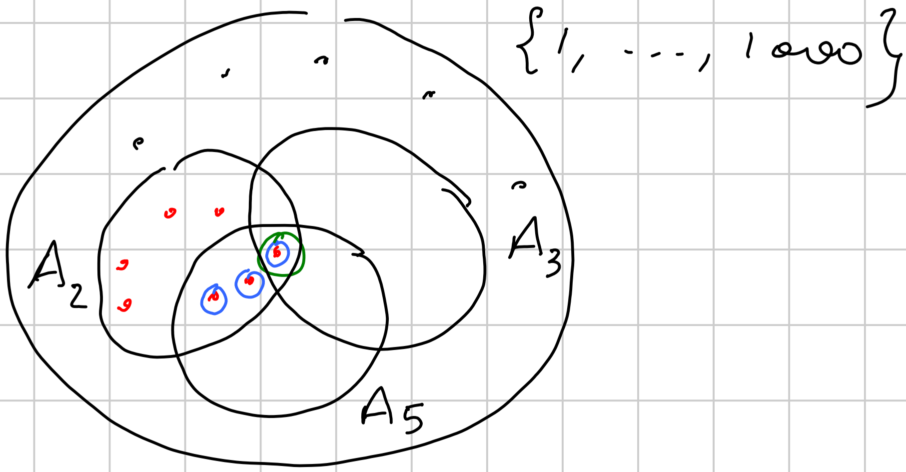
# ARITMETICA : ESERCITAZIONE

Note Title 10/4/2017

**Es** QUANTI SONO GLI INTERI $n$ $1 \le n \le 1000$ CHE $\boxed{\text{NON}}$ SONO DIVISIBILI NÉ PER 2, NÉ PER 3, NÉ PER 5

$\{1, \dots, 1000\}$




$$1000 - \underbrace{|A_2 \cup A_3 \cup A_5|}$$

$$|A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$$

$$|A_2| = \frac{1000}{2} = 500$$

$$|A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = \frac{999}{3} = 333$$

$$|A_5| = 200$$

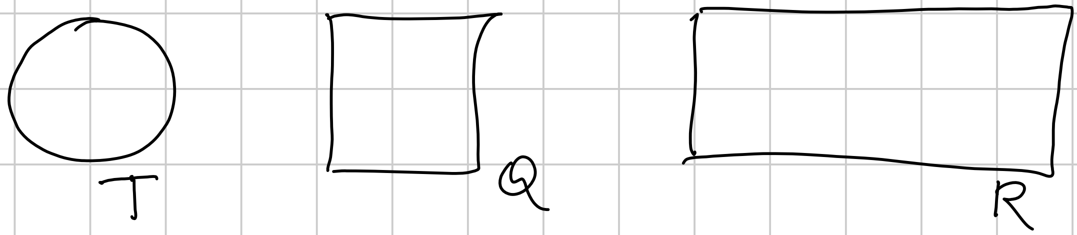
$$|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166$$

$$|A_2 \cap A_5| = 100 \qquad |A_3 \cap A_5| = 66$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5| = 33$$

$$\text{Risposta} = 1000 - \left(500 + 333 + 200 - (166 + 100 + 66) + 33\right)$$

Esercizio




7 palline in 3 scatole in modo che nessuna scatola sia vuota

Un modo di mettere le palline nelle scatole:
(eventualmente che non rispetta le richieste)

$$X = \{T, Q, R\}^7$$

TQQRQTR

$(T, Q, Q, R, Q, T, R)$

$$A_T = \{Q, R\}^7$$

$$A_Q = \{T, R\}^7$$

$$A_R = \{Q, T\}^7$$

$$\#\text{ modi "sbagliati"} = |A_T \cup A_Q \cup A_R|$$

$$A_T \cap A_Q = \{R\}^7$$

$$A_R \cap A_Q = \{T\}^7$$

$$A_T \cap A_R = \{Q\}^7$$

$$A_T \cap A_Q \cap A_R = \emptyset$$

$$|A_T \cup A_Q \cup A_R| = \underbrace{3 \cdot 2^7}_{|A_T|+|A_Q|+|A_R|} - \overbrace{(3 \cdot 1)}^{|A_T \cap A_R| + |A_T \cap A_Q| + |A_Q \cap A_R|} + \underbrace{0}_{A_T \cap A_R \cap A_Q}$$

\# modi "buoni" : $3^7 - 3 \cdot 2^7 + 3$

Es (scritto di luglio 2015)

Determinare n° di terne $(x,y,z)$ di interi $>0$ t.c.

(i) $xyz = 10^{100} = 2^{100} \cdot 5^{100}$

(ii) $x^2yz = 10^{100} = 2^{100} \cdot 5^{100}$

Scrivo $x = 2^{a_1} 5^{b_1}$ $\quad y = 2^{a_2} 5^{b_2}$ $\quad z = 2^{a_3} 5^{b_3}$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 100 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 100 \end{cases}$$

$$\#\{(x,y,z)\in\mathbb{N}^3 : xyz = 10^{100}\}$$

$$= \#\left\{ \begin{array}{l} (a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{N}^3 \\ (b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{N}^3 \end{array} \text{ t.c. } \begin{array}{l} a_1+a_2+a_3 = 100 \\ b_1+b_2+b_3=100 \end{array}\right\}$$

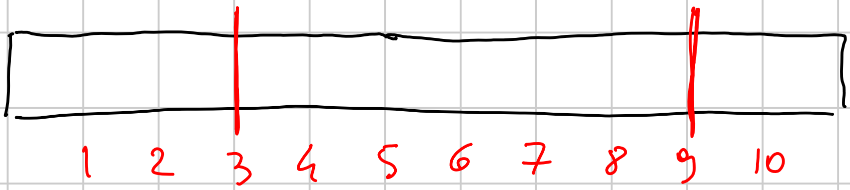
$$= \#\{(a_1,a_2,a_3) : a_1+a_2+a_3 = 100\} \times$$

$$\times\ \#\{(b_1,b_2,b_3) : b_1+b_2+b_3 = 100\}$$

$$= \#\{(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{N}^3 \text{ t.c. } a_1+a_2+a_3=100\}^{2}$$

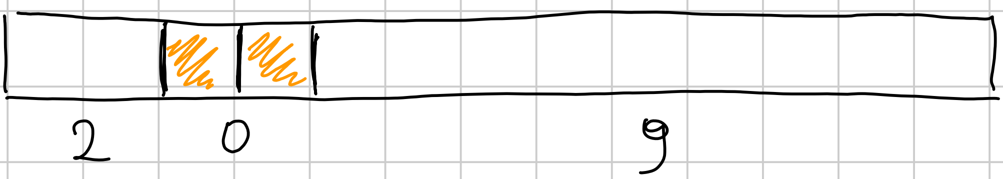
$$= \binom{100+3-1}{3-1}^2 = \binom{102}{2}^2$$

Parti $>0$




$$\binom{11-1}{3-1}$$

Parti $\geq 0$




$$\binom{11+2}{3-1}$$

Rappresentazione grafica della partizione

$11 = 2+0+9$

(ii) $x^2yz = 10^{100}$

$x = 2^{a_1}5^{b_1}, \ldots$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 + a_3 = 100 & (*) \\ 2b_1 + b_2 + b_3 = 100 \end{cases}$$

Se $a_1 = 0 \longrightarrow 101$ soluzioni $(a_2, a_3)$

$a_1 = 1 \longrightarrow 99$ " $(a_2, a_3)$

$\vdots$

$a_1 = 50 \longrightarrow 1$ " $(a_2, a_3)$

$$\#\text{soluzioni problema} = \#\{(a_1, a_2, a_3) \text{ t.c. } (*)\}^2$$

$$= (101 + 99 + 97 + \dots + 1)^2$$

$$= (51^2)^2$$

Esercizio (per casa) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$

(per induzione)

Esercizio Probabilità di fare 6 al Super enalotto?

$$\frac{1}{\binom{90}{6}}$$

Esercizio Quante mani di bridge esistono?

# mani di Nord: $\binom{52}{13}$

# mani di Ovest (fissato nord):

$$\binom{52-13}{13}$$

# mani di Sud (fissati nord e ovest)?

$$\binom{26}{13}$$

# mani di Est (fissato N, O, S) $\binom{13}{13} = 1$

Totale: $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13} =$

$$= \frac{52!}{13!\,\cancel{39!}} \frac{\cancel{39!}}{13!\,\cancel{26!}} \frac{\cancel{26!}}{13!\,\cancel{13!}} \frac{\cancel{13!}}{13!\,0!}$$

$$= \frac{52!}{13!\,13!\,13!\,13!}$$

coefficiente MULTInomiale

# modi di partizionare un insieme di $n$ elementi in sottoinsiemi di cardinalità $k_1, k_2, \dots, k_r$ è $(k_1 + k_2 + \dots + k_r = n)$

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\cdots\,k_r!}$$

Esercizio Dim che per $0 \le k \le m \le n$ si ha

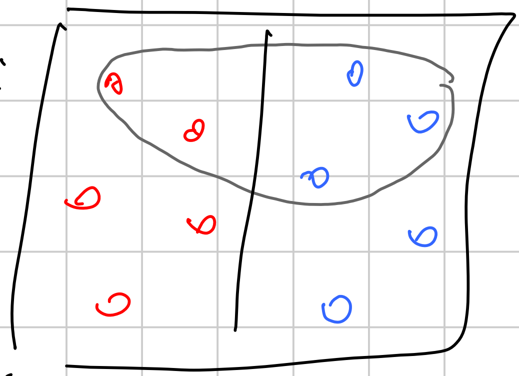
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

SX conta: i modi di scegliere un team di $m$ persone fra un totale di $n$, e poi nominare "responsabili" $k$ di queste $m$ persone

DX conta: i modi di scegliere $k$ responsabili fra $n$ persone e poi affiancargli $m-k$ persone scelte fra le rimanenti.

Secondo esempio Per $k \le 2n$ vale

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{n}{k-\ell} = \binom{2n}{k}$$



DX conta: il numero di modi di scegliere $k$ persone fra $n$ uomini ed $n$ donne

SX conta: per ogni $\ell = 0, \dots, k$, il numero di modi di scegliere $\ell$ uomini e $k-l$ donne; poi somma su $l$, ottenendo quindi il # di modi di scegliere $l+(k-l)=k$ persone, in modo che il n° di uomini sia o $0$, o $1$, o $2$, ..., o $k$.

# PROBLEMA DEI COMPLEANNI

$n$ persone; minimo $n$ per il quale ci sia almeno il 50% di probabilità che due di queste persone compiano gli anni lo stesso giorno.

Con 2 persone: $\dfrac{\left|\left\{(a,b) \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \le a,b \le 365 \\ a=b \end{array}\right\}\right|}{\left|\{1,\dots,365\}^2\right|}$

$$= \frac{365}{365^2} = \frac{1}{365}$$

Se calcolassi il complementare: $\dfrac{365 \times 364}{365 \times 365}$

Con 3 persone: calcoliamo il complementare.

$$\frac{\#\left\{(a,b,c) \;\middle|\; \begin{array}{c} 1 \le a,b,c \le 365 \\ a,b,c \text{ distinti} \end{array}\right\}}{\#\{1,\dots,365\}^3} = \frac{365 \times 364 \times 363}{365 \times 365 \times 365}$$

E con $n$ persone?

$$\frac{(365)(364)(363)\cdots(365-n+1)}{365^n} =$$

$$= \frac{365!}{(365-n)!} \cdot \frac{1}{365^n}$$

$$= \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{365}\right) = \underbrace{\frac{365}{365}}_{j=0} \cdot \underbrace{\frac{365-1}{365}}_{j=1} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(n-1)}{365}$$

Vogliamo il minimo $n$ per cui questo prodotto è $\leq 1/2$ : $\boxed{n = 23}$

SFIDE

- $$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1$$

- Il numero di modi di scrivere $n$ come somma di AL PIÙ $k$ interi positivi è $=$ al numero di modi di scrivere $n$ come somma di interi positivi, ognuno $\leq k$
  [l'ordine non conta!]

$n = 5$, $k = 2$

$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 5$ ($\leq 2$ parti)

$5 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
(parti $\leq 2$)

$$7 = 3+2+2$$ "parti $\leq 3$"

$$= 3+2+1+1$$

$$7 = 5+1+1$$

$$= 2+2+2+1$$ NO (4 parti)