Esercizio 1

A, B anelli comm. con 1. A dominio. Sia
$$\varphi : A \longrightarrow B$$
morfismo di anelli che fissa l'identità. Sia $S \subset A$ un sott. molt. chiuso. Mostrare che se $\varphi(S) \subset B^*$ allora esiste un unico morfismo $\bar{\varphi} : S^{-1}A \longrightarrow B$ che fa commutare:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "i"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & B \\
& S^{-1}A \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

dove $i : A \longrightarrow S^{-1}A$ è tale che $i(a) = \frac{a}{1}$. Mostrare che se vale che φ è iniettiva e $\forall b \in B$ $\exists a \in A, \exists s \in S$ tali che $\varphi(a)\varphi(s)^{-1} = b$ allora $\bar{\varphi}$ è un isomorfismo.

Esercizio 2

A anello comm. con 1. Mostrare che:
$$x \in \bigcap_{\substack{m \\ \text{massimale} \\ \text{in } A}} m \iff \forall y \in A \quad 1 - xy \in A^*$$

Esercizio 1

A anello comm. con 1. Se $\forall x \in A$ $\exists n > 1$ tale che $x^n = x$ allora ogni primo di A è massimale.

Esercizio 2

A anello comm. con 1. Supponiamo che $\forall x \in A$ vale che $x^2 = x$.
Allora sono fatti equivalenti:

- A ha solo un ideale massimale
- A ha solo un ideale primo
- A è un dominio
- A è un campo
- $A = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Esercizio 3

A anello comm. con 1.

1) Siano I, J ideali di A. Mostrare che se $I \cup J$ è un ideale di A allora $I \subset J$ o $J \subset I$
2) Se $\exists I \subsetneq A$ ideale tale che $\forall J$, $I \cup J$ è un ideale mostrare che $1 + I \subset A^*$

Esercizio 4

Consideriamo l'insieme $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(5) \text{ è pari}\}$
- I è un ideale? L'anello $\mathbb{Z}[x]/I$ è un campo?

Come cambiano le risposte alle domande precedenti se prendo $I = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(5) \text{ è dispari}\}$?
(Le domande sono ben poste?)

Esercizio 1

Considero il polinomio $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4$.

i) Calcolare il campo di spezzamento $\mathbb{K}$ di $p(x)$ su $\mathbb{Q}$

ii) Calcolare il gruppo di Galois $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/\mathbb{Q})$

iii) Calcolare il campo di spezzamento e il gruppo di Galois di $p(x)$ su $\mathbb{F}_7$

Esercizio 2

Sia $f(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 76$. Sia $\mathbb{K}$ il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}$,

(a) Mostrare che $f(x)$ è un polinomio irriducibile su $\mathbb{Q}$ e calcolare il grado $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$

(b) Determinare il gruppo di Galois G di $\mathbb{K}$ su $\mathbb{Q}$. Dire se il gruppo è abeliano.

Esercizio 3

- Sia A l'anello delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sia $\gamma \in \mathbb{R}$, mostrare che $M_\gamma \doteq \{ f \in A \mid f(\gamma) = 0 \}$ è un ideale massimale di A. Mostrare che esiste un ideale massimale M diverso da $M_\gamma \cdot \forall \gamma \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1

Si consideri il polinomio $f(x) = x^6 - tx^3 + t \in \mathbb{Q}(t)[x]$ e sia L il campo di spezzamento di $f(x)$ su $\mathbb{Q}(t)$.

a) Mostrare che $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Q}(t)[x]$.

b) Mostrare che se α annulla $f(x)$, allora anche $t^{1/3}/\alpha$ lo annulla.

c) Descrivere dei generatori del campo di spezzamento L di $f(x)$ su $\mathbb{Q}(t)[x]$ e mostrare che il suo grado non può essere diverso da 12, 18 o 36.

d) Mostrare che ci sono elementi $\sigma, \tau \in Gal(L, \mathbb{Q}(\zeta_3, t^{1/3}))$ tali che $\sigma(\alpha) = \zeta_3 \alpha$ e $\tau(\alpha) = t^{1/3}/\alpha$.

Esercizio 2

Si considerino gli anelli $\mathbb{Z}[i]/_{(2+2i)}$ e $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ (dove somma e prodotto sono componente per componente). Vedere se sono isomorfi come anelli unitari e nel caso esibire un isomorfismo.

Esercizio 3

Sia $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt[6]{2})$

a) Determinare il grado di K su $\mathbb{Q}$.

b) Sia F la più piccola estensione di K normale su $\mathbb{Q}$. Determinare $Gal(F, \mathbb{Q})$.

Campi

Dimostrare che $\mathbb{Q}(i,\sqrt{3},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(i+\sqrt{3}+\sqrt{5})$. Determinare il grado $[\mathbb{Q}(i,\sqrt{3},\sqrt{5}):\mathbb{Q}]$, descrivere il gruppo di Galois $Gal(\mathbb{Q}(i,\sqrt{3},\sqrt{5}),\mathbb{Q})$ e individuare tutti i sottocampi di grado 2 su $\mathbb{Q}$.

Gruppi

Vedere se Q_8 si scrive come prodotto semidiretto.

Anelli

Remark Un ideale I è detto irriducibile se soddisfa la seguente proprietà:

- $\forall I_1, I_2$ ideali tali che $I_1 \cap I_2 = I$ vale che $I_1 = I$ o $I_2 = I$

Sia A anello commutativo con unità tale che ogni catena di ideali crescente stazioni. Mostrare che ogni ideale si scrive come intersezione finita di ideali irriducibili.

Gruppi

Qual è il minimo n tale che Q_8 si immerge in S_n?

Campi

Sia F campo finito e siano α, β algebrici su F con polinomi minimi di grado 5 e 4 rispettivamente.
Mostrare che $[F(\alpha\beta) : F] = 20$

Anelli

Sia A anello comm. con 1 tale che tutte le catene discendenti di ideali stazionano. Mostrare che ogni primo è massimale.

Campi

Sia K il campo di spezzamento di x^5-3 su $\mathbb{Q}$. Determinare $[K:\mathbb{Q}]$ e descrivere il gruppo di Galois ~~di~~ $Gal(K,\mathbb{Q})$. Determinare i sottocampi di K che hanno grado 5 su $\mathbb{Q}$.

Gruppi

Dimostrare che, se $n \geq 5$, allora S_n non ha nessun sottogruppo di indice K con $2 < K < n$.

Anelli

Sia A anello comm con 1 e $I_a = \{ax - x \mid x \in A\}$.

Dico che $a \in A$ è quasi-regolare se $I_a = A$.

Provare che:

(i) $\forall a \in A$ I_a è un ideale

(ii) $a \in A$ è quasi-regolare sse $\exists c \in A$ tale che $a + c = ac$

(iii) Se $a \in A$ è nilpotente allora è quasi-regolare

(iv) Se ogni elemento di A diverso da 1 è quasi-regolare allora A è un campo.

Anelli

Sia A anello comm. con 1 che verifica le tre seguenti proprietà:

- $\mathcal{J}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{m \\ \text{massimale}}} m$ è primo diverso da (0)
- ogni ideale $I \supset \mathcal{J}(A)$ è principale
- $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{J}(A)$

Allora $\mathcal{J}(A)$ è l'unico ideale massimale di A.

Gruppi

Dato $n > 1$, sia $H < S_n$ transitivo; si provi che $\exists g \in X$ tale che $g(i) \neq i$ $\forall i$.

Anelli

A anello commutativo con unità, allora sono equivalenti:

- Ogni catena di ideali crescente staziona
- Ogni ideale di A è generato da un numero finito di elementi.

Gruppi

Quanti possono essere i sottogruppi di indice due di un gruppo finito?

Campi

Consideriamo $\mathbb{Q} \subseteq K_1, \dots, K_n$ estensioni distinte di grado 3 su $\mathbb{Q}$. Se $n=2$ quali sono i possibili gradi del composto $K_1 K_2$? Qual è il minimo n tale per cui $\forall K_1, \dots, K_n$ $9 \mid [K_1 \dots K_n : \mathbb{Q}]$.

Anelli

Trovare due sottoinsiemi distinti molt. chiusi S_1, S_2 di $\mathbb{Z}$ tali che $S_1^{-1}\mathbb{Z} = S_2^{-1}\mathbb{Z}$, oppure mostrare che non ne esistono.

Gruppi

Sia G gruppo senza sottogruppi normali di indice finito. Sia $N \trianglelefteq G$ di ordine finito, allora $N < Z(G)$.

Campi

Calcolare i possibili $n \geq 3$ per cui esiste di grado 3 $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tale che $\zeta_n \in K$ dove K è il cds di $p(x)$ su $\mathbb{Q}$.

Gruppi

Sia G gruppo finito e $H < G$ che interseca tutte le classi di coniugio. Mostrare che $H = G$.

Anelli

Sia A anello comm. con 1 e siano I, J ideali di A.

- Che relazione c'è tra $\sqrt{I} + \sqrt{J}$ e $\sqrt{I+J}$?
- Che relazione c'è tra $\sqrt{\sqrt{I}+\sqrt{J}}$ e $\sqrt{I+J}$?

Campi

Determinare il gruppo di Galois della più piccola estensione di $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{2})$ che è normale su $\mathbb{Q}$.

Anelli

Per quali $n \in \mathbb{N}$ esiste un anello A tale per cui A ha esattamente n massimali.

Gruppi

Sia G gruppo e $H < G$. Definisco la seguente azione:

$$\begin{aligned} H \times G &\longrightarrow G \\ (h, g) &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

- Che relazione c'è tra le orbite di questa azione e quella data del coniugio?
- Vale la divisibilità tra le cardinalità delle orbite nuove e di quelle vecchie?
- Se H è normale come cambia la risposta alla domanda precedente?

Campi

Contare le sottoestensioni di $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ su $\mathbb{Q}$.

Gruppi

Sia G gruppo, mostrare che se esiste un sottogruppo di indice finito allora esiste un sottogruppo normale di indice finito.

Anelli

Sia A anello commutativo con unità. Mostrare che $f(x) \in A[x]$ è invertibile se $a_n, \dots, a_1$ sono nilpotenti in A e $a_0 \in A^*$, dove $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$.

Campi

Sia $K \supset \mathbb{Q}$ di Galois di grado 8. Al variare di K quali gruppi $Gal(K, \mathbb{Q})$ si realizzano?

Anelli

Quali sono gli ideali massimali di $\mathbb{C}[x]$, e quelli primi?

Campi

Calcolare i gruppi di Galois del campo di spezzamento di $x^5 - m$ su $\mathbb{Q}$ e su $\mathbb{F}_7$.

Gruppi

Sia G gruppo, mostrare che $\mathrm{Aut}(G)$ non può essere isomorfo a $\mathbb{Z}$.