COMPITO DI ALGEBRA 1

19 febbraio 2019

1. Consideriamo un 3-sottogruppo di Sylow P del gruppo simmetrico S_9.

(a) Dimostrare che P è isomorfo al prodotto semidiretto $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Si descriva in particolare l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3)$.

(b) Per ogni divisore d di $|P|$, determinare quanti siano gli elementi di ordine d in P.

2. Sia p un numero primo, sia G un p-gruppo finito non ciclico.

(a) Dimostrare che G possiede almeno due sottogruppi distinti di indice p.

(b) Sia H un sottogruppo di G non ciclico e non normale. Dimostrare che H contiene un sottogruppo K con $[H : K] = p$ che non è un sottogruppo normale di G.

3. (a) Sia A un dominio a fattorizzazione unica e sia K il suo campo delle frazioni. Sia $u \in K$ un elemento con la seguente proprietà: esiste un polinomio **monico** $p(x) \in A[x]$ tale che $p(u) = 0$. Dimostrare che $u \in A$.

(b) Per ogni intero positivo n sia $A_n = \{a + bni \bigm| a, b \in \mathbb{Z}\}$ il sottoanello di $\mathbb{Z}[i]$ generato da ni. Determinare per quali n l'anello A_n è a fattorizzazione unica.

4. Sia $p(x) = x^{12} + 2^2 3^6$ e sia K il suo campo di spezzamento su $\mathbb{Q}$.

(a) Dimostrare che esiste $\lambda \in \mathbb{Z}[i]$ tale che $\lambda^4 = -4$.

(b) Dimostrare che K coincide con $L = \mathbb{Q}(\zeta_3, i, \sqrt[3]{2})$.

(c) Determinare il gruppo di Galois di K su $\mathbb{Q}$.