ALGEBRA 1 - 30 OTT 2018

Note Title 10/30/2018

2° teo. di omomorfismo (per gruppi)

G gruppo, $H, K \lhd G$ $H \subseteq K$.
Allora
$$G/_K \cong {}^{G/_H}\Big/_{K/_H}$$

$H \lhd G \Rightarrow H \lhd K$ $K \lhd G \Rightarrow K/_H \lhd G/_H$.

Dim $f: G \longrightarrow G/_H \longrightarrow {}^{G/_H}\Big/_{K/_H}$

f è la composizione di due proiezioni canoniche.
(f è un omomorfismo surgettivo)
Nucleo di f:
$$g \in G \longmapsto gH \quad H \quad g \quad g\, {}^{K/_H}\Big/_{K/_H}$$

$$g \in \ker f \iff g\, K/_H = K/_H \iff gK = K \iff g \in K$$

3° teorema di omomorfismo.

G gruppo, $H, K < G$.
So che $HK < G$ se $K \subseteq N(H)$.
In questa ipotesi,
$$HK/_H \cong K/_{H \cap K}$$

$H \cap K \trianglelefteq K$; infatti, se $g \in K$
$gKg^{-1} \subseteq K \qquad gHg^{-1} \subseteq H$
$\Rightarrow \quad g(K \cap H)g^{-1} \subseteq K \cap H$.

<u>Dim.</u> Sia $f : K \to HK/H$
definita da $f(k) = Hk$
(è la proiezione canonica $G \to G/H$
ristretta al sottogruppo K)
f è un omomorfismo, surgettivo per definizione)

$\underset{\substack{\shortparallel \\ K \cap H}}{\underline{\ker f}}$: $k \in K$ tali che $\underset{\substack{\Updownarrow \\ k \in H}}{Hk = H}$

Commutatori di un gruppo G
(Notazione standard G', che si dice anche derivato di G).

<u>Def.</u> $G' = \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G \}$

<u>Proprietà</u>
(1) $G' \trianglelefteq G$ (cioè $gG'g^{-1} \subseteq G'$ $\forall g \in G$)

$g \in G \quad a \in G' \Rightarrow gag^{-1} \in G'$.
Basta scegliere a fra i generatori di G'.

$\underbrace{gxyx^{-1}}\wedge y^{-1}g^{-1}$

$(gx)y$

Ho un commutatore

$(gx)y(gx)^{-1}y^{-1}$

$= \underbrace{gxy\,x^{-1}}\,g^{-1}y^{-1}$

$$gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1} = (gxyx^{-1}g^{-1}y^{-1})(\underbrace{ygy^{-1}g^{-1}}_{\text{commutatore}})$$

② G/G' è abeliano.

$\pi : G \to G/G' \qquad \pi(x) = \bar{x}$

Devo vedere che $\forall x, y$ si ha $\bar{x}\cdot\bar{y} = \bar{y}\cdot\bar{x}$

cioè $\quad \bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{x}^{-1}\cdot\bar{y}^{-1} = id$

$\Leftarrow \quad xyx^{-1}y^{-1} \in \ker\pi = G'$.

② bis Se $H \trianglelefteq G$ $\quad G/H$ è abeliano

$\Leftrightarrow \quad H \geq G'$.

G/H abeliano $\Leftrightarrow \quad \bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$

$\Leftrightarrow \quad \bar{x}\bar{y}\cdot\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1} = id$

$xyx^{-1}y^{-1} \in \ker\pi$

$G' \subseteq H$

Esempi, ① $G = S_n \quad (n \geq 5)$

Gli unici sottogruppi normali sono

$\{e\}, A_n, S_n$.

Si ha $G' = A_n$.

② $G = D_4$

(Nota: Un sgr di ordine 2 $\{e, x\}$ è normale in un gruppo $G \Leftrightarrow x \in Z(G)$.

$g\{e,x\}g^{-1} = \{geg^{-1}, gxg^{-1}\} = \{e, gxg^{-1}\}$

normale $\Leftrightarrow$ $x = gxg^{-1} \quad \forall g \in G$

$\Leftrightarrow$ $xg = gx \quad \forall g \in G$

$\Leftrightarrow$ $x \in Z(G)$)

$D_4 = \langle r, s \rangle \qquad r^4 = s^2 = e \qquad sr = r^{-1}s$

$Z(D_4) = \{e, r^2\}$

$G' = \{e, r^2\}$

(3) G non abeliano, $|G| = p^3$.

Allora $|Z(G)| = p$.

$|G/_{Z(G)}| = p^2 \qquad G/_{Z(G)}$ è abeliano.

<u>Esercizio</u> G p-gruppo. Consideriamo

$$F = \bigcap_{\substack{M < G \\ M \text{ massimale}}} M.$$

(sgr di Frattini)

<u>1° fatto</u>: $\boxed{G/_F \cong (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^k}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Infatti, M massimale $\Rightarrow [G:M] = p$.

$\Rightarrow M \trianglelefteq G \Rightarrow G/_M$ abeliano $(\cong \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})$.

$\Rightarrow M \geq G' \Rightarrow F = \cap M \geq G'$

$\Rightarrow G/_F$ è abeliano.

Ora ogni elemento di $G/_F$ ha ordine p (o 1).

Infatti, se $g \in G$ $\quad g^p \in M \quad \forall M$

$\Rightarrow g^p \in \cap M = F$.

Quindi: Teor

2° fatto Il minimo numero di generatori di G è $\geq k$.

3° fatto (base) Prendo un insieme di generatori di $G/F \cong (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^k$.

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k$.

Siano $x_1, x_2, \dots, x_k \in G$ tali che $\pi(x_i) = \bar{x}_i$ ($\pi : G \to G/F$).

Si ha che $\langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle = G$.

Supponiamo, per assurdo, che $H = \langle x_1, \dots, x_k \rangle$ sia diverso da G.
Allora esiste M massimale tale che $H \subseteq M$
Allora $\pi(H) \subseteq \pi(M) \neq G/F$

Ma $\pi(M)$ è uno s.v. su $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ di dimensione $< k$

mentre $\pi(H) = G/F$ (contiene una base?)

$$\begin{matrix} \pi(H) & = & G/F \\ \Vert & & \Vert \\ & \langle \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k \rangle & \end{matrix}$$

CONTRADDIZIONE.

$$\mathrm{Aut}\left(\mathbb{Z}/_{9\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}\right) = \mathrm{Aut}(G)$$

Oss Se prendo $(a,b) \in G$, $(c,d) \in G$ tale che $3(c,d) = 0$, posso costruire un omomorfismo

$$f: G \to G$$

tale che $f(\bar{1},\bar{0}) = (a,b)$ $f(\bar{0},\bar{1}) = (c,d)$

Basta porre

$$f(x,y) = x(a,b) + y(c,d)$$
$$= (ax+cy,\ bx+dy)$$

Se voglio un isomorfismo (in particolare surgettivo) devo rispettare le condizioni.

1. $\operatorname{ord}(a,b) = 9$
2. $\operatorname{ord}(c,d) = 3$
3. $(c,d) \notin \langle (a,b) \rangle$

N° di automorfismi possibili:

(a,b) ha $27 - 9 = 18$ possibilità.

(c,d) ha $8 - 2 = 6$ possibilità

$$\Rightarrow |\operatorname{Aut}(G)| = 18 \cdot 6 = 108.$$

(Posso scrivere un automorfismo con una matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a, c \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \\ b, d \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \end{matrix}$$

Cond. ① $\Rightarrow$ $\operatorname{ord} a = 9$ $\quad a \not\equiv 0 \ (3)$

Cond ② + ③ $\Rightarrow$ $(c,d) \neq (3a,0), (6a,0)$

$\Rightarrow$ $d \not\equiv 0 \ (3)$

(a 6 poss. , b 3 poss. , c 3 poss., d 2 poss.)

" $\det M \not\equiv 0 \pmod 3$)

G abeliano, $|G| = p^n$.

<u>Es</u> Allora $p^{n-1} \mid \operatorname{ord}(\operatorname{Aut}(G))$.

<u>1° caso</u> G ciclico $|\operatorname{Aut}(G)| = \phi(p^n)$
$= (p-1)p^{n-1}$.

<u>2° caso</u> G non ciclico, quindi ha una decomposizione con almeno due fattori.

$$\underbrace{G}_{\operatorname{ord} = p^n} \cong \underbrace{C_1}_{p^a} \times \underbrace{C_2 \times \dots \times C_s}_{p^b} \qquad s > 1 \qquad a+b = n.$$

$$x = (1, 0, \dots, 0)$$

$\operatorname{Aut} G$ agisce su G.

$\operatorname{Stab}(x) \supseteq \operatorname{Aut}(C_2 \times \dots \times C_s)$

Usando un'ipotesi induttiva, $p^{b-1} \mid \operatorname{ord}(\operatorname{Stab} x)$

Consideriamo $\operatorname{Orb}(x)$. Scrivendo $G = C_1 \times H$

ho almeno questi isomorfismi, definiti da

$\varphi(1,0) = (i, h)$ con $(i,p)=1$ e $h \in H$

$\varphi(0,h) = (0,h)$ $\forall h \in H$

e, in generale, $\varphi(s,t) = (si, sh) + (0,t) = (si, sh+t)$

Infatti, sono omomorfismi sono iniettivi:

Se $\varphi(s,t) = 0$, allora $(is, sh+t) = (0,0)$

$\Rightarrow$ $is = 0$ $\Rightarrow s = 0 \Rightarrow t = 0$.

Ci sono $p^{a-1}(p-1)$ (scelte di i)

$\times \quad p^b \quad$ scelte di h

Quindi sono un multiplo di $p^{a+b-1}(p-1) \quad p^{n-1}(p-1)$

$\Longrightarrow$ multiplo di p^{n-1}.