Un teorema ”topologico” del valor medio per cammini continui nel piano

1. Introduzione

Sia ϕ un cammino continuo nel piano che che vada da un punto A ad un punto B distinto da esso. Ci chiediamo se in tale percorso, debba esistere almeno un momento in cui il ”movimento istantaneo” abbia la stessa direzione del vettore di spostamento globale $B-A$. Il teorema di Lagrange, tratta il caso particolare in cui il cammino ϕ è il grafico di una funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, cioè:

$$[a,b]\ni t\mapsto\phi(t)=(t,f(t))\in\mathbb{R}^2$$

nella ipotesi che f sia derivabile nei punti interni all'intervallo $[a,b]$.
In tal caso per ”direzione istantanea” si intende la derivata del cammino in tale ”istante”; quindi la domanda è se esista $t\in]a,b[$ per cui il vettore $(1,f'(t))$ sia positivamente proporzionale al vettore $B-A=(b-a,f'(b)-f'(a))$ il ché è appunto la tesi del teorema di Lagrange.
Nel caso che il cammino non sia di tipo grafico appaiono alcune difficoltà.
La prima é che anche supponendo che il cammino sia differenziabile, se la derivata si annulla (cosa che nel caso che ϕ sia un grafico non può accadere) essa non fornisce alcuna direzione; ed anche nel caso che il cammino sia di tipo molto regolare, in modo che si possa definire la sua ”direzione” anche nei punti ove la derivata sia nulla (ad esempio se analitico reale o almeno ”coerente” come spiegato in [*]) la risposta può essere negativa. Ad esempio per il cammino

$$[-1,1]\ni t\mapsto\phi(t)=(t^2,t^3)$$

(cioè una cuspide) in nessun punto la direzione può essere considerata quella di

$$\phi(1)-\phi(-1)=(0,2)$$

quindi si deve supporre nell'ipotesi il non annullarsi della derivata.
Ma quanto chiediamo può avere risposta negativa anche in tale ipotesi, se il cammino non è globalmente iniettivo (cosa che non può accadere nel caso che ϕ sia un grafico) come mostra l'esempio:

$$[-2,2]\ni t\mapsto\phi(t)=(t^3-t,1-t^2)$$

che disegna una l in corsivo); essa ha in ogni istante una derivata non nulla ma mai di direzione positivamente concorde con $(2,0)$ (è orizzontale per $t=0$ ma ha ivi il verso opposto a quello che vorremmo).

La dimostrazione classica del teorema del valor medio viene fatta, nelle ipotesi dette di Rolle, in due passi. Il primo di tipo topologico assicura l'esistenza di un punto interno all'intervallo di definizione che soddisfi una proprietà geometrica particolare (essere un punto di massimo o di minimo relativo) per questo utilizza solo l'ipotesi che la funzione sia continua su un dominio compatto.
Il secondo passo è che se la funzione è derivabile allora nei punti con tale proprietà geometrica, tale derivata è nulla.
La trattazione del caso che il cammino non sia necessariamente un grafico segue

lo stesso schema: dopo aver definito cosa intendiamo per "direzione istantanea" di un cammino non necessariamente derivabile o iniettivo si dimostra, dovendo utilizzare semplici fatti sui gruppi fondamentali, un teorema che assicura l'esistenza di una "soluzione topologica" al problema del valor medio. Questo avrà poi come corollario un enunciato formalmente "identico" a quello classico di Lagrange.

2. Definizioni

Diciamo che una funzione reale f definita su un intervallo $[a, b]$ è *orizzontale* in un punto $t \in]a, b[$ se per ogni $\epsilon > 0$ esistono $x, y \in]a, b[$ per cui

$$f(x) = f(y) \qquad t - \epsilon < x < t < y < t + \epsilon$$

Se f è orizzontale in un punto t in cui è derivabile, allora la sua derivata in quel punto è nulla; infatti se fosse ad esempio $f'(t) > 0$ allora esisterebbe un intorno di t in cui $f(x) < f(t)$ per $x < t$ ed $f(x) > f(t)$ per $x > t$ e quindi f non sarebbe orizzontale. Si noti che la dimostrazione del teorema della media (nel caso in cui $f(a) = f(b)$ utilizza l'esistenza di un punto interno ad $[a, b]$ nel quale la funzione è orizzontale: ed infatti nei punti interni ove la f è localmente costante essa è orizzontale; se invece la f non possiede punti in cui è localmente costante, allora essa è orizzontale almeno in ogni punto di massimo o minimo relativo che sia interno ad $[a, b]$.

Questo fatto e cioè che il punto di cui viene dimostrata l'esistenza non è solo un punto in cui la derivata è nulla ma anche un punto di orizzontalità non appare nell' enunciato del teorema, potendo esso essere eventualmente anche un punto di flesso orizzontale (derivate prima e seconda nulle e la terza diversa da zero) in cui non si ha orizzontalità nel senso sopra definito.

Discuteremo un analogo del teorema della media nel caso di cammini continui nel piano utilizzando per essi una nozione analoga alla orizzontalità introdotta sopra.

Diciamo *direzione* di un $v \in \mathbb{R}^2$ non nullo la sua normalizzazione $v/||v|| \in S^1$ e *direzione* di un cammino continuo $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ avente estremi distinti la direzione del vettore $\phi(b) - \phi(a)$; per *corda* di un tale cammino intenderemo una coppia di scalari $a < s < t < b$ tali che $\phi(t) - \phi(s)$ sia non nullo e della stessa direzione di ϕ. Sia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un cammino continuo ed $r \in]a, b[$; diremo che $D \in S^1$ è una *direzione per* ϕ *in* r se esistono una successione strettamente crescente (s_n) ed una successione strettamente decrescente (t_n) in $]a, b[$ e convergenti entrambi ad r e tali che tutte le restrizioni di ϕ ai segmenti $[s_n, t_n]$ siano ad estremi distinti ed abbiano direzione D.

Un cammino può non avere direzioni in qualche punto r di $]a, b[$; ad esempio esso non ne ha se è localmente costante in r; ma anche nel caso che in r esso presenti un "buon flesso" (ossia il caso di un cammino differenziabile tre volte che nel punto r ha la derivata seconda nulla mentre la prima e la terza sono linearmente indipendenti) non ha alcuna direzione.

Un cammino può avere anche infinite direzioni in un punto: ogni sottoinsieme connesso di S^1 può apparire come l'insieme delle direzioni che qualche cammino ha in un suo punto.

Abbiamo visto che esistono cammini non iniettivi la cui direzione non è assunta in alcun punto intermedio; introduciamo quindi una nozione più generale di quella di direzione che mostreremo essere verificata in ogni caso:

diremo *dato di valor medio* per un cammino continuo ϕ avente estremi distinti il dato di una coppia di scalari (s, t) con $a < s \leq t < b$ per i quali sono verificati i due seguenti fatti:

1. $\phi(s) = \phi(t)$
2. esistono in $]a, b[$ una successione strettamente crescente (s_n) convergente ad s ed una successione strettamente decrescente (t_n) convergente a t tali che ogni (s_n, t_n) sia una corda di ϕ.

3. **Enunciati e dimostrazioni**
Sia $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un cammino continuo con $\phi(a) \neq \phi(b)$

Lemma 1 Il cammino ϕ possiede almeno una corda.

Dim. Sia I l'intervallo aperto in R^2 avente per estremi $\phi(a)$ e $\phi(b)$.
Supponiamo dapprima che ϕ "non attraversi" I, ossia che $\phi([a, b]) \cap I = \emptyset$. Consideriamo il triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / : \ a \leq x \leq y \leq b\}$ e sia $\sigma : T \to X$ definita da $\sigma(x, y) = \phi(y) - \phi(x) + \phi(a)$.
Asserzione: l'immagine di σ contiene tutto I; ossia per ogni $\rho \in]0, 1[$ esistono $s, t \in]a, b[$ con $a < s < t < b$ e $\phi(t) - \phi(s) + \phi(a) = \phi(a) + \rho(\phi(b) - \phi(a))$ o in altri termini ϕ possiede corde di ogni lungezza inferiore a quella di I.
Infatti sia fissato un $l \in I$. La restrizione di σ al lato obliquo di T vale costantemente $\phi(a)$ mentre le restrizioni al lato verticale ed orizzontale di T "sono" il cammino ϕ ed il suo simmetrizzato rispetto al punto medio di I. La restrizione di σ al bordo di T può quindi essere interpretata come un laccetto in $\mathbb{R}^2 - \{l\}$ di punto base $\phi(a)$, che definisce così una classe $\bar{l}$ in $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{l\}, \phi(a))$.
Se σ evitasse l, siccome T è contrattile, deformando il bordo di T al punto $\phi(a)$ (ad esempio facendo muovere il lato orizzontale di T parallelamente a se stesso verso il basso) e componendo quindi con σ si otterrebbe una deformazione (omotopia in $\mathbb{R}^2 - \{l\}$) del laccetto sopra indicato a quello costante in $\phi(a)$ e si avrebbe quindi che la classe $\bar{l}$ è nulla. Basterà quindi mostrare che $\bar{l}$ è non nulla in $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{l\}, \phi(a)) \cong \mathbb{Z}$. Verifichiamo infatti che $\bar{l}$ è rappresentata, nelle ipotesi fatte su ϕ, da un elemento dispari di $\mathbb{Z}$: intanto è ovvio che variando con continuità ϕ tra le applicazioni di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^2 - I$ anche la sua trasformata mediante σ varia con continuità; basterà quindi esaminare le ϕ in una classe di rappresentanti omotopici delle applicazioni continue di $[a, b]$ in $\mathbb{R}^2 - I$ che applicano a in $\phi(a)$ ed b in $\phi(b)$ ad esempio quelle del tipo seguente: detto S il cerchio avente I come diametro, lo si percorra un certo numero n di volte (ad esempio in senso antiorario) e quindi, proseguendo, ancora un'altra metà. E' chiaro che per una tale ϕ la classe $\bar{l}$ corrispode a $2n + 1 \in \mathbb{Z}$.
Esaminiamo ora il caso che ϕ "attraversi "I ossia che esista $s \in]a, b[$ con $\phi(s) \in I$. Consideriamo la restrizione di ϕ all'intervallo $[s, b]$. Questo è un cammino avente estremi distinti e la stessa direzione di ϕ. Se questo non "attraversa il suo" I ossia l'intervallo aperto I' di estremi $\phi(s)$ e $\phi(b)$, per quanto visto avanti esso possiede corde di tutte le lunghezse inferiori a quella di I' le quali sono anche

corde per ϕ. Altrimenti anche essa "attraversa" I' ed esiste quindi un $t \in]s, b[$ con $\phi(t)$ nel segmento aperto di estremi $\phi(s)$ e $\phi(b)$ che assieme a s dà allora una corda per ϕ.

Nota. La dimostrazione precedente mostra che se ϕ non attraversa il segmento I allora non solo esiste una sua corda ma ne esistono di tutte le lunghezze inferiori a quella di I. Si noti che se invece ϕ attraversa I, certe lunghezze di corde possono essere omesse: si veda ad esempio il cammino $t \mapsto (t, \sin(2\pi t))$

Teorema Ogni cammino continuo $[a, b] \ni t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^2$ con $\phi(a) \neq \phi(b)$ ammette almeno un dato di valor medio (a', b'). Se il cammino è iniettivo allora la sua direzione è assunta in almeno un punto interno ad $[a, b]$

Dim. Mostriamo che per ogni corda (s, t) di ϕ l'estremo inferiore h delle lunghezze di corde di ϕ in essa contenuta è 0. Infatti se (s, t) è una corda di ϕ allora applicando il lemma precedente alla restrizione a $[s, t]$ di ϕ si ha l'esistenza di un'altra corda di ϕ contenuta in $]s, t[$; presa una successione di corde (s_n, t_n) le cui lunghezze tendono ad h, passiamo ad una sottosuccessione in cui le s_n convergono ad un s_0 e le t_n ad un t_0. Se fosse $h \neq 0$ allora (s_0, t_0) sarebbe una corda di ϕ e conterrebbe una corda di lunghezza inferiore ad h.
Prendiamo ora per ϕ una corda (s_1, t_1) di lunghezza inferiore ad 1, entro questa un'altra (s_2, t_2) di lunghezza inferiore ad $1/2$ etc. otteniamo una successione di corde una strettamente contenuta nella precedente e le cui lunghezze tendono a zero: le s_n formano una successione strettamente crescente e la t_n una strettamente decrescente convergenti ad un s_0 e ad un t_0 con $0 < s_0 \leq t_0 < 1$ ove ogni (s_n, t_n) è una corda di ϕ e in cui, essendo $h = 0$, si ha $\phi(s_0) = \phi(t_0)$. Insomma quel che abbiamo costruito in questo modo è esattamente un dato di valor medio per ϕ.

Lemma 2 In un punto $r \in]a, b[$ nel quale ϕ ha una derivata e questa è non nulla, vi è al più la direzione di tale derivata

Dim. Sia T la derivata di ϕ in r.
Per $0 < s < r$ e $r < t < 1$ definiamo $u, v \in \mathbb{R}^2$ per le formule:

$$\frac{\phi(r) - \phi(s)}{r - s} = T + u \qquad \frac{\phi(t) - \phi(r)}{t - r} = T + v$$

Quindi per $s \to r$ e $t \to r$ si ha $u, v \to 0$. Moltiplicando la prima per $r - s$, la seconda per $t - r$, sommando le due e dividendo tutto per $t - s$ si ottiene:

$$\frac{\phi(t) - \phi(s)}{t - s} = T + \frac{r - s}{t - s} u + \frac{t - r}{t - s} v$$

Se s, t tendono ad r appartenendo a delle successioni che evidenziano una data direzione D di ϕ in r e quindi il membro di sinistra ha sempre direzione D, anche quello di destra deve avere direzione costantemente D ; al limite questa è la direzione di T che è quindi anch'essa D.

Da questo lemma e dal teorema precedente segue il:

Corollario Supponiamo che il cammino ϕ sia:
- iniettivo
- derivabile in ogni punto di $]a, b[$ e che tale derivata sia sempre non nulla

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\dot{\phi}(\xi)$ ha la stessa direzione di ϕ

[$*$] Piani e sfere osculatrici ad archi differenziabili: in questa pagina personale