PROVA INTERMEDIA DI ALGEBRA del 2 Aprile 2007

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$**, mentre se è dispari sia** $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$**, mentre se è dispari sia** $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$
e $w = 0$**);**

Esercizio 1
Dati i polinomi

$$p(x) = x^3 + (4 - v - w)x^2 + (vw - 4v - 2w + 4)x + 2vw - 4v,$$

$$q(x) = x^3 + (4 - v - w)x^2 + (vw - 5v - 2w + 1)x + 3vw - 6v + 3w - 6$$

a) Calcolare il prodotto pq.
b) Calcolare il massimo comun divisore di p e q usando l'algoritmo di Euclide.
c) Fattorizzare i polinomi p, q e pq come prodotto di polinomi di grado uno, usando l'informazione sul massimo comun divisore ottenuta nel punto precedente.

Esercizio 2
Sia data la matrice $M \in M_{3,4}(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 - w - v & 2 + v + w & -2 \\ 1 + w + v & v + w - 3 & 0 & 2 \\ -w - v - 1 & -w - v + 3 & w + v + 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Usando il metodo di Gauss, mettere la matrice M in forma a scalini
b) Usando il punto precedente, trovare tutte le soluzioni del sistema lineare associato alla matrice M.

Esercizio 3
Sia data la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia L_A l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ associata ad A.
a) Si dimostri che $Ker(L_A)$ è formato dal solo vettore zero.
b) Si trovi un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che

$$L_A(v) = \begin{pmatrix} v + 1 \\ w - 2 \\ v + w + 3 \end{pmatrix}$$

c) Si dimostri che il v trovato è l'unico vettore di $\mathbb{R}^3$ che soddisfa l'equazione.