COMPITO DI ALGEBRA del 9 GIUGNO 2006

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Chi vuole consegnare una sola parte deve farlo entro due ore dall'inizio. Dopo due ore si possono consegnare solo tutte e due le parti (e quindi si rinuncia ad un eventuale esonero ottenuto con i compitini).

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$**, mentre se è dispari sia** $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$**, mentre se è dispari sia** $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ **e** $w = 0$**);**

PRIMA PARTE:

Esercizio 1
Siano dati i polinomi

$$p(x) = x^3 + (-w - 3)x^2 + (-v^2 - 2v - 1)x + (v^2 + 2v + 1)w + 6v + 3$$

$$q(x) = x^3 + (w + 2v + 4)x^2 + ((2v + 1)w + v^2 + 7v + 3)x + (v^2 + v)w + 3v^2 + 3v$$

a) Calcolare il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide.
b) Fattorizzare p in prodotto di fattori di grado uno usando il risultato del punto precedente.

Esercizio 2
Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

$$V_t = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -tw + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ (t-1)v \\ -w - t + 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W_t = \left\langle \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -tw + t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ v + t - 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Trovare una base di W_t al variare del parametro t.
b) Trovare una base dell'intersezione $V_t \cap W_t$ al variare del parametro t.
c) Calcolare la dimensione di $V_t + W_t$ al variare del parametro t.

SECONDA PARTE:

Esercizio 3

Sia V lo spazio delle matrici reali triangolari superiori 2×2,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

e sia $f : V \to V$ la funzione definita come $f(M) = BM$, dove B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} v+2 & 1 \\ 0 & w-2 \end{pmatrix}$$

a) Dimotrare che f è una applicazione lineare.

b) Calcolare la matrice $M^{\beta}_{\beta}(f)$ di f rispetto alla base β di V data da:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -w+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 4

Sia f_t l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in se stesso associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$) alla matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} w+t-2 & -t & -tv \\ tvw - tv + t & (-tv+1)w + tv - t - 2 & -tvw \\ -tw + t & tw - t & (tv+1)w - tv - 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il polinomio caratteristico di f_t.

b) Trovare tutto lo spettro di f_t, sapendo che contiene il numero $w-2$.

c) Determinare per quali valori di t l'applicazione f_t è diagonalizzabile.