COMPITO DI ALGEBRA del 6 SETTEMBRE 2006

con traccia delle soluzioni

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Chi vuole consegnare una sola parte deve farlo entro due ore dall'inizio. Dopo due ore si possono consegnare solo tutte e due le parti (e quindi si rinuncia ad un eventuale esonero ottenuto con i compitini).

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

PRIMA PARTE:

Esercizio 1
Siano dati i polinomi

$$p = x^3 + (w - 2v - 1)x^2 + ((-2v - 2)w + v - 5)x + (3v - 3)w + 3v - 3,$$

$$q = x^3 + (w - 2v)x^2 + ((-2v - 1)w - 3)x + (2v - 2)w + 2v - 2$$

a) Calcolare p^2, il quadrato del polonomio p.
b) Calcolare il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide.
c) Calcolare il massimo comun divisore fra p^2 e q uno usando il risultato del punto precedente.
Traccia della soluzione
a) Calcolo esplicito
b) Algoritmo svolto a lezione.
c) Se r_1 è un fattore irriducibile sia di p che di q, allora lo è anche di p^2. Se viceversa r_1 è un fattore irriducibile sia di p^2 che di q, allora r_1 deve dividere p^2 e quindi, essendo irriducibile, deve dividere p. In conclusione, i massimi comun divisori (p, q) e (p^2, q) hanno gli stessi fattori irriducibili. Per trovare (p^2, q) basta quindi verificare quali potenze dei fattori irriducibili di (p, q) dividono sia p^2 che q.

Esercizio 2
Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, sia $S_t = S(A_t, b)$ il sistema lineare non omogeneo associato alla matrice A_t di coefficienti ed alla colonna b di termini noti:

$$A_t = \begin{pmatrix} v+1 & 0 & t \\ 0 & w+1 & t \\ -v-1 & w+1 & t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Usando l'eliminazione di Gauss, trovare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ una soluzione del sistema S_t (quando questa esiste)
a) Usando l'eliminazione di Gauss, trovare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato al sistema S_t
b) Trovare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni del sistema S_t
Traccia della soluzione
a),b) Calcolo esplicito
c) Fissato t, o il sistema S_t non ha soluzioni, oppure tutte le soluzioni si ottengono a partire da una fissata s_0 aggiungendo le solusioni $Sol(S(A_t, 0))$ del sistema lineare omogeneo associato.

SECONDA PARTE:

Esercizio 3
Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a 2, $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$, e sia

$$\beta = \left\{1 - x, x + x^2, 1 + x + x^2\right\}$$

Sia $f : V \to V$ la funzione definita come composizione delle funzioni g e h, $f(p) = g \circ h(p)$, con $g : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to V$, $h : V \to \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

$$g(p) = \frac{\partial p}{\partial x} \text{ (la "derivata" del polinomio p rispetto alla variabile x)}$$

$$h(p) = (x + v + w + 2) * p \text{ (la moltiplicazione di p per il polinomio x+v+w+2)}$$

1) Si dimostri che f, g, h sono applicazioni lineari.
2) Si calcolino le matrici A, B, C rispettivamente di f, g, h relative alla base β di V e alla base $\beta \cup \{x^3\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
3) Si dimostri che $A = BC$.
Traccia della soluzione
a) Basta dimostrare che g, h sono lineari, dato che la composizione di applicazioni lineari è lineare.
b) Basta calcolare B, C dato che poi (per un Teorema dimostrato a teoria, che asserisce che (fissata una base) la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto fra le rispettive matrici) si ha che $A = BC$.
c) Per costruzione (se il punto precedente è stato svolto come indicato); Per un Teorema dimostrato a teoria, che asserisce che (fissata una base) la matrice associata alla composizione di due applicazioni lineari è il prodotto fra le rispettive matrici (se nel punto precedente si sono calcolate direttamente tutte e tre le matrici $A.B, C$)

Esercizio 4
Sia f l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in se stesso associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} w + v + 1 & 1 & 1 \\ -2 & w + v + 3 & 1 \\ 1 & 0 & w + v + 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
b) Trovare tutto lo spettro di f, sapendo che contiene il numero $v + w + 2$.
c) Determinare se l'applicazione f è diagonalizzabile.

Traccia della soluzione
a),b),c) Calcolo esplicito secondo le linee indicate a lezione.