COMPITO DI ALGEBRA del 21 LUGLIO 2006

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Chi vuole consegnare una sola parte deve farlo entro due ore dall'inizio. Dopo due ore si possono consegnare solo tutte e due le parti (e quindi si rinuncia ad un eventuale esonero ottenuto con i compitini).

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

PRIMA PARTE:

Esercizio 1
Siano dati i polinomi

$$p(x) = x^3 + (-w-1)x^2 - (3v+1)x + (3v+1)w + 3v + 1$$

$$q(x) = x^3 + -4x^2 - (-3v-1)x + 12v + 4$$

a) Calcolare il prodotto pq.
b) Calcolare il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide.
c) Fattorizzare p, q e pq in prodotto di fattori di grado uno usando il risultato del punto precedente.
Soluzione
a) Calcolo diretto.
b) I polinomi p, q sono primi fra loro, cioè il loro massimo comun divisore è 1.
c) Non si può procedere come indicato (i polinomi non dovevano risultare primi fra loro, ma un errore nel segno del coefficiente di grado uno di q li ha resi tali).

Esercizio 2
Al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, sia f_t l'applicazione lineare omogeneo associata alla matrice A_t di coefficienti

$$A_t = \begin{pmatrix} -1 & -w-v+2t-3 & -3w-v+4t-8 & -w+t-2 \\ 0 & -w+v-2 & -3w+v+2t-6 & -w+t-2 \\ v-t+2 & -w-v+2t-2 & -3w+3t-4 & -w-2v+3t-4 \\ 0 & -w-v+2t-2 & -3w-v+4t-6 & -w+t-2 \end{pmatrix}$$

a) Usando l'eliminazione di Gauss, trovare al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$ una base del sottospazio $V_t = Im(f_t)$ generato dalle colonne di A_t

b) Trovare un sottospazio $W_t \subset \mathbb{R}^4$ tale che

$$\mathbb{R}^4 = V_t + W_t, \qquad dim(V_t \cap W_t) = 1$$

Soluzione

a) L'eliminazione di Gauss porta ad una matrice a scala. Le colonne che contengono i pivot di questa matrice lette nella matrice A_t formano una base per l'immagine.

b) Bisogna completare la base trovata nel punto precedente ad una base di $\mathbb{R}^4$, e poi prendere come W_t lo spazio generato dai nuovi vettori più uno della base di V_t.

SECONDA PARTE:

Esercizio 3
Sia $V =$ lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche reali 3×3,
$V = \{B \in M_3(\mathbb{R}) \mid {}^tB = -B\}$, e sia

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-v \\ 0 & 0 & 0 \\ 1-v & 0 & v \end{pmatrix}$$

e sia $f : V \to V$ la funzione definita come $f(B) = ABA$.
1) Si dimostri che f è una applicazione lineare.
2) Si calcoli la matrice di f rispetto alla base β.
3) Si calcoli la dimensione del nucleo di f.
Soluzione
1) Bisogna verificare che $f(B_1 + B_2) = f(b_1) + f(B_2)$ e $f(tB_1) = tf(B_1)$ per tutte le matrici B_1, B_2 e per tutti i numeri $t \in \mathbb{R}$.
2) Il metodo è illustrato nel testo. Il risultato è

$$M_\beta(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2v-1 \end{pmatrix}$$

3) Usando la matrice $M_\beta(f)$, che è già in forma a scalini, si vede sbito che la dimensione del nucleo è 3 - numero dei pivots = 2.

Esercizio 4
Sia f l'applicazione lineare da $\mathbb{R}^3$ in se stesso associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} w+v+3 & -2w-2 & -w-1 \\ w+1 & -2w+v & -w-1 \\ 0 & w+1 & w+v+3 \end{pmatrix}$$

a) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
b) Trovare tutto lo spettro di f, sapendo che contiene il numero $v + 2$.
c) Determinare se l'applicazione f è diagonalizzabile.
Soluzione
1) Il polinomio caratteristico è

$$p_f(\lambda) = -\lambda^3 + (3v+6)\lambda^2 - (15v+12)\lambda + 19v + 8$$

2) Il polinomio caratteristico si fattorizza come

$$p_f\lambda) = -(\lambda - v - 2)^3$$

e quindi lo spettro è formato dal solo elemento $v + 2$.
3) La molteplicità alebrica di $v + 2$ è 3 per il punto precedente. La molteplicità geometrica è

$$m_g(v+2) = dim(Ker(f - (v+2)Id) = 2$$

e quindi l'aplicazione f non è diagonalizzabile.