COMPITO DI ANALISI MATEMATICA DEL 6 LUGLIO 2004

DOCENTE: MICHELE GRASSI

Nome:
Numero di matricola:

Prima parte (relativa al materiale svolto prima del primo compitino):

(1) a) Si dimostri per induzione su n che la somma dei numeri pari minori o uguali a $2n$ è $n(n+1)$.
b) Si dimostri, usando il punto precedente, che per ogni intero positivo k la somma dei numeri pari minori o uguali a k è
$$\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)$$
(dove con $[x]$ si indica la parte intera del numero x).

(2) a) Si dimostri che la funzione $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = e^{\left[\frac{3}{x^2}\right]}$$
è a scala.
b) Si calcoli l'integrale
$$\int_1^2 f(x)dx$$
c) Si dimostri che la funzione
$$g(x) = e^{\frac{3}{x^2}}$$
non è a scala sull'intervallo di definizione $[1,2]$.

Seconda Parte (relativa al materiale svolto fra il primo e il secondo compitino):

(1) Data la funzione $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ definita come
$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$
se ne calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3 nel punto 2.

(2) Sia $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da

$$g(x) = (cos(x) - sin(x))e^x$$

a) Si dimostri che g è integrabile su $[0, \pi]$.
b) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{\pi} g(x)dx$$

(3) Sia $h(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ (pensato come funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
a) Si calcoli il polinomio di Taylor di h di ordine 2 nel punto 1.
b) Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{1} h(x)dx$$

Terza parte (esercizi più teorici, utili se si è ottenuta l'ammissione all'orale con le prime due parti o con i compitini):

(1) Sia $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^{x^2}$..
a) Si dimostri che $\forall x \in (1, 2)\ f'(x) > 0$.
b) Si dimostri che f è monotona in senso stretto in $(1, 2)$

(2) Sia $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ data da $g(x) = sin(x)$. Si trovi una funzione a scala $h : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ tale che $h \leq g$ e tale che inoltre

$$\int_0^{\pi} (g(x) - h(x))dx \leq \frac{1}{2}$$

(3) Si dimostri che esiste una ed una sola funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ tale che:
a) f ha derivata in tutti i punti di definizione e ha funzione derivata f' continua in tutti i punti di definizione.
b) $f(0) = 0$
c) $\forall x \in (-1, 1) \quad f'(x) = cos(x)$