PROVA SCRITTA DI ALGEBRA del 5 Luglio 2005

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. La prima parte corrisponde al materiale svolto prima della prima prova intermedia, la seconda parte corrisponde al materiale svolto prima della seconda prova intermedia. La terza parte verrà valutata solo se c'è già la sufficienza nelle prime due, ed è di natura più teorica.

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

Esercizio I-1
Dati i polinomi

$$p(x) = x^3 - (w + v + 2)x^2 + ((v + 1)w + 3v - 1)x + (2 - 2v)w - 2v + 2$$
$$q(x) = x^2 - (v + 2)x + 3v - 3$$

a) Si calcoli il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide
b) Usando il risultato del punto precedente, si fattorizzi il polinomio $p(x)$ in prodotti di polinomi di grado uno.

Esercizio I-2

Siano dati i sottospazi V e W di $\mathbb{Q}^3$, con

$$V = < e_1 + te_2 + (u + v + 1)e_3,\ e_2 + e_3 >$$

e W l'insieme dei vettori di Q^3 di coordinate x, y, z che soddisfano l'equazione $(1 + u + v)x + y - z = 0$.

a) Al variare del parametro t, trovare la dimensione dello spazio somma $V + W$.

b) Al variare del parametro t, trovare una base dello spazio intersezione $V \cap W$.

Esercizio II-1

Sia $V = R_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi reali di grado minore o uguale a tre, e sia $f : V \to V$ l'applicazione "derivata", definita come

$$f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

Siano

$$p_1 = (1 - v)x^2 + x + 1,\ \ p_2 = -x^2 + 1,\ \ p_3 = x^2 + x + u + 2$$

a) Si dimostri che l'insieme $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$ è una base di V.
b) Si calcoli la matrice $M_\beta(f)$ associata all'applicazione lineare f rispetto alla base β. c) Si calcoli il determinante di $M_\beta(f)$ usando il metodo di Laplace.

Esercizio II-2

Si consideri la matrice $A_t \in M_3(\mathbb{R})$, dipendente dal parametro reale t, definita come

$$\begin{pmatrix} 1+t+v+w & 0 & -t \\ -tw-3t & 1+v+w & tw+3t \\ t & 0 & v+w-t+1 \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di A_t al variare del parametro reale t, usando il metodo di Laplace per il calcolo dei determinanti.
b) Si calcoli lo spettro dell'applicazione lineare associata alla matrice A_t al variare del parametro reale t, sapendo che $1+v+w$ appartiene allo spettro di A_t.
c) Per ogni elemento c nello spettro di A_t, si calcolino molteplicita' algebrica e geometrica di c come funzione del parametro reale t.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA del 14 giugno 2005 - parte teorica

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. Questa parte dello scritto verrà valutata solo se c'è già la sufficienza nelle prime due, ed è di natura più teorica.

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$**, mentre se è dispari sia** $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$**, mentre se è dispari sia** $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ **e** $w = 0$**);**

Esercizio III-1
Si dimostri che se la matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{R})$ soddisfa l'equazione $A^2 = Id$, allora l'applicazione lineare associata ad A rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^n$ deve avere almeno un autovettore.

Esercizio III-2

Sia $A \in M_n(\mathbb{R}$ una matrice quadrata reale, e sia

$$f(t) = det(tA + Id)$$

a) Si dimostri che la funzione $f(t)$ è un polinomio di grado al più n.
b) Si dimostri che se A è invertibile, allora la funzione f ha tante radici quanti sono gli autovalori distinti di A.