PROVA SCRITTA DI ALGEBRA del 14 giugno 2005

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. La prima parte corrisponde al materiale svolto prima della prima prova intermedia, la seconda parte corrisponde al materiale svolto prima della seconda prova intermedia. La terza parte verrà valutata solo se c'è già la sufficienza nelle prime due, ed è di natura più teorica.

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$, mentre se è dispari sia $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$, mentre se è dispari sia $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ e $w = 0$);

Esercizio I-1
Dati i polinomi

$$p(x) = x^3 - (v + w + 4)x^2 + ((v + 3)w + 3v + 5)x - (2v + 2)w - 2v - 2,$$
$$q(x) = x^2 + (1 - v - w)x + (v - 2)w + v - 2$$

a) Si calcoli il massimo comun divisore fra p e q usando l'algoritmo di Euclide
b) Usando il risultato del punto precedente, si fattorizzi il polinomio $p(x)$ in prodotti di polinomi di grado uno.

Esercizio I-2

Sia data L'applicazione lineare L_A associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} v+w-2 & 1 & 1 \\ -2 & v+w & 0 \\ 2 & -1 & v+w-1 \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli (trovandone una base) il nucleo $Ker(L_A)$ di L_A.
b) Si calcoli (trovandone una base) l'immagine $Im(L_A)$ di L_A.
c) Si trovi il sottospazio intersezione $Ker(L_A) \cap Im(L_A)$

Esercizio II-1

Sia data L'applicazione lineare L_A associata (rispetto alla base standard di $\mathbb{R}^3$) alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} v-2 & w+1 & w+1 \\ -2-2w & 3w & 2w-v \\ w+2 & v-w-1 & 2v-1 \end{pmatrix}$$

e sia $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base di $\mathbb{R}^3$ data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcolare la matrice B associata a L_A rispetto alla base β, $B = M_\beta(L_A)$.

Esercizio II-2

Si consideri la matrice $A_t \in M_3(\mathbb{R})$, dipendente dal parametro reale t, definita come

$$\begin{pmatrix} -2t & -w+v+2t & -w+v+2t \\ w-2v-3t & -2w+2v+2t & -w+v+2t \\ -w+v+2t & w-t & v-t \end{pmatrix}$$

a) Si calcoli il polinomio caratteristico di A_t al variare del parametro reale t, usando il metodo di Laplace per il calcolo dei determinanti.
b) Si calcoli lo spettro dell'applicazione lineare associata alla matrice A_t al variare del parametro reale t.
c) Per ogni elemento c nello spettro di A_t, si calcolino molteplicita' algebrica e geometrica di c come funzione del parametro reale t.
d) Si determinino i valori del parametro t per i quali A_t è diagonalizzabile.
e) Per i t individuati nel punto precdente, si trovi una base di autovettori di $\mathbb{R}^3$ relativamente all'applicazione associata ad A_t.

PROVA SCRITTA DI ALGEBRA del 14 giugno 2005 - parte teorica

NOME (scrivere stampatello):
COGNOME (scrivere stampatello):
NUMERO DI MATRICOLA:
NUMERO DI RIGA:
(la prima riga è quella più vicina alla cattedra)
NUMERO DI COLONNA:
(la prima colonna è quella più vicina alla porta)

Svolgere gli esercizi nello spazio seguente il testo e nella facciata successiva, senza usare fogli aggiuntivi. Questa parte dello scritto verrà valutata solo se c'è già la sufficienza nelle prime due, ed è di natura più teorica.

Se il numero di riga è pari, sia $v = 0$**, mentre se è dispari sia** $v = 1$
Se il numero di colonna è pari, sia $w = 0$**, mentre se è dispari sia** $w = 1$
(esempio: se il numero di riga è 7 e il numero di colonna è 4, si ha $v = 1$ **e** $w = 0$**);**

Esercizio III-1
Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano dati i polinomi p, q nella variabile x

$$p(x) = (x - v)^{n+2}(x - w + 3),$$
$$q(x) = (x - v)^{n+2} - (x - v)^{n}(x^2 - (2v + 1)x + w + v^2 - 3)$$

Si calcoli il massimo comun divisore fra p e q, giustificando il risultato ottenuto.

Esercizio III-2

Sia A una matrice reale $3x3$ il cui spettro contiene solo l'elemento $v+2$.
a) Si calcolino la dimensione del nucleo e dell'immagine di A.
b) Si dimostri che se $A^2 = A$, allora A non può essere diagonalizzabile.