Primo esercizio:
Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:
$\pi_1 = \{P + t_1X_1 + t_2X_2 \mid t_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$
$\pi_2 = \{Q + s_1Y_1 + s_2Y_2 \mid s_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$,
dove $P = (1, -1, 1)$, $X_1 = (2, 3, 0)$, $X_2 = (5, 2, 1)$, $Q = (0, 0, 0)$, $Y_1 = (0, -1, -1)$, $Y_2 = (1, 1, 7)$. Si determinino due vettori $R, V \in \mathbb{R}^3$ tali che $\pi_1 \cap \pi_2 = \{R + \lambda V \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Ricaviamo una equazione per il secondo piano, trovando la direzione v ad esso ortogonale. Per fare questo imponiamo le equazioni $v \cdot Y_1 = 0$, $v \cdot Y_2 = 0$.Se $v = (a, b, c)$, deve essere
$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + b + 7c = 0 \end{cases}$$
Tramite sostituzione, il sistema e' equivalente a
$$\begin{cases} b = -c \\ a = -b - 7c = -6c \end{cases}$$
e quindi la direzione perpendicolare a π_2 e' individuata dal vettore $v = (6, 1, -1)$. L'equazione per π_2 sara' quindi $6x + y - z = 0$. Per trovare l'intersezione dei due piani, imponiamo che il punto generico $(x, y, z) = (1 + 2t_1 + 5t_2, -1 + 3t_1 + 2t_2, 1 + t_2)$ del primo soddisfi l'equazione del secondo:
$6(1 + 2t_1 + 5t_2) + (-1 + 3t_1 + 2t_2) - (1 + t_2) = 0.$
Raccogliendo, si ottiene
$4 + 15t_1 + 31t_2 = 0$, ovvero $t_1 = -\frac{31}{15}t_2 - \frac{4}{15}$
Sostituendo nell'espressione per (x, y, z), si ottiene che il punto generico dell'intersezione ha coordinate
$(1 + 2(-\frac{31}{15}t_2 - \frac{4}{15}) + 5t_2, -1 + 3(-\frac{31}{15}t_2 - \frac{4}{15}) + 2t_2, 1 + t_2)$
Raccogliendo, e rinominando $t_2 = 15\lambda$, si ottiene l'espressione
$(x, y, z) = (\frac{7}{15}, -\frac{27}{15}, 1) + t_2(\frac{13}{15}, -\frac{63}{15}, 1) = (\frac{7}{15}, -\frac{27}{15}, 1) + \lambda(13, -63, 15)$
Possiamo in conclusione prendere $R = (\frac{7}{15}, -\frac{27}{15}, 1)$ e $V = (13, -63, 15)$.

Secondo esercizio

Si considerino il vettore $V = (1, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ e, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, il vettore $N_t = (t, 2, t) \in \mathbb{R}^3$.

1. Si determini, al variare di $t \in \mathbb{R}$, un vettore $W_t \in \mathbb{R}^3$ ortogonale ad N_t e tale che $V - W_t$ risulti parallelo ad N_t;
2. Si determini l'insieme (possibilmente vuoto) dei valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui la retta ortogonale a W_t ed N_t risulti contemporaneamente ortogonale al vettore $(0, 0, 1)$.

---

(1) $V - W_t$ e' parallelo a N_t se e solo se esiste λ_t tale che $V - W_t = \lambda_t N_t$. Ne segue che $W_t = V - \lambda_t N_t$. Imponendo $W_t \cdot N_t = 0$, si ottiene
$(1 - \lambda_t t, -1 - 2\lambda_t, 2 - \lambda_t t)(t, 2, t) = 0$
Risolvendo, si ottiene $\lambda_t = \frac{3t-2}{2t^2+4}$. Questo determina

$$W_t = \left(\frac{-t^2 + 2t + 4}{2t^2 + 4}, \frac{-t^2 + -3t}{t^2 + 2}, \frac{t^2 + 2t + 8}{2t^2 + 4} \right)$$

(2) Cerco un generatore $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ della retta:
$\begin{cases} (a, b, c) \cdot N_t = 0 \\ (a, b, c)\,(V - \lambda_t N_t) = 0 \end{cases}$
Sostituendo la prima equazione nella seconda, si ottiene il sistema equivalente
$\begin{cases} (a, b, c) \cdot N_t = 0 \\ (a, b, c) \cdot V = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ta + 2b + tc = 0 \\ a - b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a + 2c \\ a(t + 2) + c(t + 4) = 0 \end{cases}$
La condizione di ortogonalita' a $(0, 0, 1)$ impone $c = 0$, e quindi
$\begin{cases} b = a \\ a(t + 2) = 0 \end{cases}$
L'unico valore di t per cui $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ e' $t = -2$, che determina la retta di direzione $(1, 1, 0)$.