ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE

1. Sia $\mathbb{Q}[x]_3$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ dei polinomi a coefficienti razionali di grado minore o uguale a tre. Si dimostri che l'insieme $\{x-2,(x-2)^2,(x-2)^3\} \subseteq \mathbb{Q}[x]_3$ è una base del sottospazio:
$$W = \{p(x) \in \mathbb{Q}[x]_3 \mid p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{Q}[x]_3.$$
2. Sia $\mathbb{Q}^4$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ delle quadruple di numeri razionali, e siano $v_1 = (1,1,1,1), v_2 = (1,0,1,0), v_3 = (2,1,2,1), v_4 = (0,0,1,2) \in \mathbb{Q}^4$. Indicati con $U, V \subseteq \mathbb{Q}^4$, rispettivamente, le chiusure lineari degli insiemi $\{v_1,v_2\}$, e $\{v_3,v_4\}$, si determini una base di $U \cap V$.
3. Si consideri, nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ di tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, il sottospazio W dato dalla chiusura lineare dell'insieme costituito da $f,g,h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ date da, rispettivamente, $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $h(x) = x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si determini la dimensione di W.
4. Sia $\mathbb{Q}^3$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ delle terne di numeri razionali, e siano $v_1 = (0,1,2), v_2 = (1,2,3), v_3 = (2,3,4), v_4 = (3,4,5) \in \mathbb{Q}^3$. Si determini per quali valori di $q \in \mathbb{Q}$ esiste un funzionale lineare $f\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}$ tale che:
$$f(v_1) = 1, \quad f(v_2) = 2, \quad f(v_3) = 3, \quad f(v_4) = q$$
5. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ delle quadruple di numeri reali. Si dia un esempio di un'applicazione lineare $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che siano verificate contemporaneamente le seguenti due condizioni:
   (a) $\ker T = \{(\lambda,\lambda,\lambda,\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\ker T \subseteq \operatorname{Im} T$.
6. Si determini, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo:
$$\begin{cases} x + \lambda^2 y & = 0 \\ \qquad 6y - z & = 0 \\ 2x + 5\lambda y - z & = 0 \end{cases}$$
7. Si consideri $\mathbb{C}^2$ sia come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ che come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ l'unità immaginaria, e sia $W \subseteq \mathbb{C}^2$ il sottospazio vettoriale reale generato dai vettori:
$$v_1 = (-2+i,1), \quad v_2 = (i,0), \quad v_3 = (-i,i).$$
Si ponga
$$i \cdot W = \{i \cdot w \mid w \in W\},$$
dove $i\cdot : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ è la moltiplicazione scalare per i. Si dimostri che
$$W \cap i \cdot W \subseteq \mathbb{C}^2$$
è una retta complessa (ovvero un sottospazio vettoriale complesso di dimensione complessa uno).
8. Si considerino $\mathbb{Q}^2$ e $\mathbb{Q}^3$ come spazi vettoriali su $\mathbb{Q}$. Siano f_λ, g_λ, al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{Q}$, applicazioni lineari da $\mathbb{Q}^2$ a $\mathbb{Q}^3$ tali che:
$$\begin{aligned} f_\lambda((1,0)) &= (1,1,0), & f_\lambda((0,1)) &= (\lambda, 1-\lambda, 0), \\ g_\lambda((1,0)) &= (1-\lambda, 0, \lambda), & g_\lambda((0,1)) &= (1-\lambda, 1, \lambda) \end{aligned}$$
Si determini, al variare di λ, la dimensione di $\operatorname{Im} f_\lambda \cap \operatorname{Im} g_\lambda \subseteq \mathbb{Q}^3$.