Terza prova in Itinere Ist. Mat. 1, Seconda parte, Tema 1

24 maggio 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Sia H il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la dimensione di H, scriverne una base e trovare un sistema di equazioni che descrivono H.
Si consideri poi il sottospazio K di $\mathbb{R}^4$ definito dalle equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - 5z + w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$$

b) Calcolare la dimensione di K e scriverne una base.
c) Calcolare la dimensione di $H \cap K$ e scriverne una base.

Soluzione.

a) Consideriamo la matrice che ha per colonne i vettori v_1, v_2, v_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

notiamo che ha rango 2: infatti i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti e vale la relazione $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Dunque la dimensione di H è 2 e una sua base è costituita dai vettori v_1, v_2.

Posto $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ un generico vettore, si ha che v appartiene al sottospazio H se è dipendente da v_1, v_2, ovvero se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ -2 & 3 & y \\ 0 & 1 & z \\ 1 & 1 & w \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Visto che le prime due righe sono linearmente indipendenti, questo equivalente a chiedere che il determinante dei minori 3x3 fatti con prima, seconda e terza riga e con prima, seconda e quarta riga siano entrambi nulli, ovvero:

$$\begin{cases} -2x - y + 5z = 0 \\ 5w - 5x = 0. \end{cases}$$

b) La matrice dei coefficienti delle due equazioni è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2. Dunque K è il nucleo di un'applicazione lineare di rango 2 da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^2$ e quindi la dimensione di K è $4 - 2 = 2$.

In particolare visto che il minore 2x2 della matrice formato con le prime due colonne ha determinante diverso da 0, possiamo cercare una base di K con vettori della forma

$$w_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Imponendo le condizioni del sistema otteniamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Consideriamo il sistema di equazioni che descrive $H \cap K$:

$$\begin{cases} -2x - y + 5z = 0 \\ 5w - 5x = 0 \\ 2x + y - 5z + w = 0 \\ x + y + z + w = 0. \end{cases}$$

La matrice associata

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha rango 3, infatti il suo determinante è 0, mentre il determinante del primo minore 3x3 è -50. Quindi la dimensione di $H \cap K$ è $4 - 3 = 1$ e possiamo cercare un vettore che ne costituisca la base nella forma $u = (a, b, c, 1)$. Sostituendo nel sistema e risolvendo con Gauss otteniamo

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1-2t \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \\ t \end{pmatrix}.$$

a) Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare la dimensione dello span di v_1, v_2, v_3, v_4.

b) Al variare di t trovare una base dello span di v_1, v_2, v_3, v_4.

Soluzione.

a) Notiamo subito che $v_2 = -2v_1$, quindi possiamo eliminare il vettore v_2 e considerare solo i vettori v_1, v_3, v_4. Per trovare la dimensione dello span calcoliamo il rango della matrice associata:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1+t & 4t \\ 3 & 1-2t & 4t \\ 4 & 2 & t \end{pmatrix}.$$

Il determinante vale $45t^2 + 21t$ e dunque si annulla per $t = 0$ e per $t = -\frac{7}{15}$. Dunque per $t \neq 0, -\frac{7}{15}$ la matrice ha rango 3. Per $t = 0$ la matrice ha rango 2 perché il determinante del minore fatto con le prime due righe di prima e seconda colonna è diverso da zero. Per $t = -\frac{7}{15}$ il rango è di nuovo 2 perché il determinante del minore fatto con prima e seconda riga della prima e seconda colonna è diverso da 0.

b) Per quanto visto al punto precedente abbiamo che per $t \neq 0, -\frac{7}{15}$ i vettori v_1, v_2, v_3, v_4 generano tutto $\mathbb{R}^3$. Una base è data da v_1, v_3, v_4 (ma va bene anche la base standard di $\mathbb{R}^3$). Per $t = 0, -\frac{7}{15}$ i vettori v_1, v_3 sono linearmente indipendenti e generano lo span di v_1, v_2, v_3, v_4, quindi sono una base.

Esercizio 3. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x_1 + ax_2 + 2x_3 + (3-2a)x_4 = a+6 \\ x_1 + 5ax_2 + x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + ax_2 + x_3 + (3a+2)x_4 = 3a+6 \end{cases}$$

(1) Risolverlo con il metodo di Gauss per $a = 1$.
(2) Per $a = 0$ stabilire se esiste o meno soluzione del sistema (senza calcolarla).

Soluzione.
(1) Per $a = 1$ si ha che la matrice completa associata al sistema è data da

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Moltiplicando la terza riga per opportuni coefficienti e sottraendola alle altre righe (e spostando la terza riga al primo posto) si ottiene la matrice equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -10 & -2 & -8 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dividendo per 2 e per 3 la seconda e terza riga, rispettivamente, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -7 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Spostando al secondo posto la 3 riga e sottraendola (moltiplicata per opportuni coefficienti alle altre righe) si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sottraendo la terza riga dalla prima e dalla quarta (moltiplicando quest'ultima per -4 e la terza riga per 11) si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 35 \end{pmatrix}.$$

da cui semplificando si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Concludendo l'unica soluzione è data da $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

(1) Per stabilire se il sistema ha soluzione posso usare il teorema di Rouchè Capelli e calcolare il rango delle matrici incompleta e completa associate al sistema. Per $a = 1$ si ha tali matrici sono date da

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

La matrice incompleta A ha rango minore di 4 visto che due colonne sono uguali. Calcolando il determinante della sottomatrice 3×3 dato da righe $2, 3, 4$ e colonne $2, 3, 4$ si ha che questo è diverso da zero per cui la matrice A ha rango 3. Rimane da calcolare il rango della matrice completa C. Visto che è una matrice 4×5 bisogna controllare prima se esiste una sottomatrice 4×4 con determinante diverso da zero. Inizio col calcolare quella determinata dalle colonne $2, 3, 4, 5$. Sviluppo il determinante rispetto alla colonna con 3 zeri per cui mi riduco a calcolare il determinante della matrice 3×3

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

che è diverso da zero. Deduco che il sistema non puø‘ avere soluzione.