Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema XY

13 dicembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 3z^4 - 2z$ trovare le soluzioni complesse z di $P(z) = 0$.
(2) Determinare tutte le soluzioni x reali di $3x^4 - 2x = 0$.
(3) Riscrivere il polinomio $P(x) = 3x^4 - 2x$ come prodotto di polinomi di primo o secondo grado nella variabile x a coefficienti reali.

Soluzioni. (1) Il polinomio si riscrive come $P(z) = z(3z^3 - 2)$ ed una sua soluzione è $z = 0$. Le altre soluzioni sono date da $3z^3 - 2 =$ ossia le radici terze complesse del numero $w = 2/3$. Dato che $w = 2/3e^{i0}$ le sue radici terze sono $z_1 = \sqrt[3]{2/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{2/3}(-1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_3 = \sqrt[3]{2/3}(-1 - \sqrt{3}i)/2$.

(2) Dato che le radici $z_2 = \sqrt[3]{2/3}(-1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_3 = \sqrt[3]{2/3}(-1 - \sqrt{3}i)/2$ trovate nel punto precedente non sono numeri reali, le soluzioni reali sono solo $x_1 = 0$ ed $x_2 = \sqrt[3]{2/3}$.

(3) Si ha la decomposizione complessa $P(z) = 3z(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Date le due radici reali si ha che $P(x) = 3x(x - \sqrt[3]{2/3})Q(x)$ e $Q(x)$ può essere calcolato o facendo la divisione tra polinomi o moltiplicando i due termini $(x - z_2)(x - z_3)$ dove z_2, z_3 sono le due radici coniugate sopra. Risulta $Q(x) = x^2 + \sqrt[3]{2/3}x + \sqrt[3]{4/9}$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti

$$(a) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos(x)}{e^{x^3} - \sqrt{1+x^3}};$$

$$(b) \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2^x+1) + \cos(x)}{\sqrt{3+2x^2}}.$$

Soluzioni.

(a) Calcoliamo lo sviluppo al terzo ordine di numeratore e denominatore. Per questo calcoliamo:

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{6} + o(x^3),$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

da cui

$$\sin(2x) - 2x(\cos(x)) = 2x - \frac{4}{3}x^3 - 2x + x^3 + o(x^3) = -\frac{1}{3}x^2 + o(x^3).$$

Per il denominatore abbiamo:

$$e^t = 1 + t + o(t); \qquad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t + o(t);$$

da cui otteniamo

$$e^{x^3} - \sqrt{1+x^3} = 1 + x^3 - 1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) = \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$

e dunque il limite cercato diventa

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos(x)}{e^{x^3} - \sqrt{1+x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = -\frac{2}{3}.$$

(b) Notiamo che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{3+2x^2}} = 0$$

e calcoliamo invece

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{\sqrt{3+2x^2}}$$

Derivando il numeratore abbiamo

$$\mathrm{D}(\ln(2^x+1)) = \ln(2)\frac{2^x}{2^x+1}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln(2)\frac{2^x}{2^x+1} = \ln(2);$$

mentre derivando il denominatore otteniamo:

$$\mathrm{D}(\sqrt{3+2x^2}) = \frac{2x}{\sqrt{3+2x^2}}; \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{3+2x^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2^x+1) + \cos(x)}{\sqrt{3+2x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2^x+1)}{\sqrt{3+2x^2}} + \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{3+2x^2}} =$$

(applichiamo quindi il teorema di de l'Hôpital all'addendo sinistro)

$$= \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{\ln(2)}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = x^2 e^{-x^3}$, definita per $x \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare le zone di monotonia di f ed eventuali massimi e minimi locali.
(2) Determinare le zone di convessità e concavità di f.
(3) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione.
(4) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha più di una soluzione.

Soluzioni.

(1) Deriviamo $f(x)$:

$$f'(x) = 2xe^{-x^3} - 3x^4 e^{-x^3} = (2 - 3x^3)xe^{-x^3}.$$

Il fattore e^{-x^3} è sempre positivo. Il fattore $(2-3x^3)x$ è un polinomio che si annulla (con molteplicità 1) per $x = 0$ e $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (si veda l'Esercizio 1) e che è strettamente positivo per $0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Ne segue che $f'(x)$ è positiva per $0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ e negativa per $0 > x$ e $x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Dunque $f(x)$ è crescente per per $0 < x < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ e decrescente per $0 > x$ e $x > \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Il punto $x = 0$ è un minimo locale (in cui $f(0) = 0$), mentre il punto $x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ è un massimo locale (con $f(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{\frac{2}{3}}$).

(2) Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = (9x^6 - 18x^3 + 2)e^{-x^3}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal segno del polinomo $p(t) = 9t^2 - 18t + 2$ per $t = x^3$. Il polinomio $p(t)$ si annulla per $t_1 = 1 + \frac{\sqrt{7}}{3}, t_2 = 1 - \frac{\sqrt{7}}{3}$. Il polinomo è positivo all'esterno dell'intervallo $[t_1, t_2]$ e negativo all'interno. Dunque $f(x)$ è concava per $x < \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{7}}{3}}$ e per $x > \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{7}}{3}}$, mentre è convessa per $\sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{7}}{3}} < x < \sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt{7}}{3}}$.

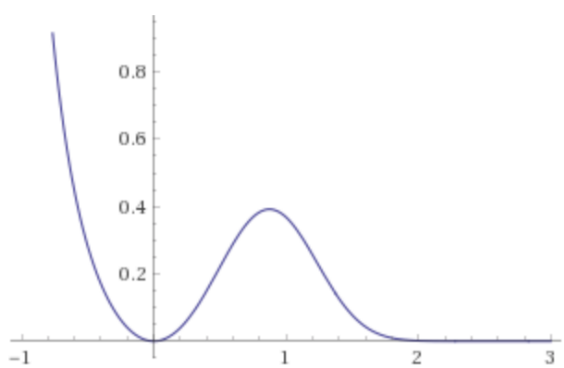

Grafico della funzione $f(x)$

(3) Abbiamo che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e inoltre $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $f(x)$ assume un minimo assoluto nel punto $x = 0$ con valore $f(0) = 0$. Quindi f assume tutti e soli i valori compresi tra 0 e $+\infty$. Dunque l'equazione $f(x) = \beta$ ammette soluzione se e solo se $\beta \geq 0$.

(4) Poichè $f(x)$ è strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$, in quell'intervallo $f(x)$ assume esattamente una volta ogni valore in $[0, +\infty]$. Nell'intervallo $(0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}})$ la funizione $f(x)$ è crescente e quindi assume una seconda volta tutti i valori in $(0, \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{\frac{2}{3}})$. Infine in $(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, +\infty)$ la funzione $f(x)$ è di nuovo decrescente e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ed assume quindi una terza volta tutti i valori in $(0, \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{\frac{2}{3}})$. Quindi $f(x) = \beta$ ammette più di una soluzione se e solo se $0 < \beta \leq \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{\frac{2}{3}}$.

Prima prova in Itinere Ist. Mat., Seconda parte, Tema ZW

13 dicembre 2018

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

(1) Dato il polinomio $P(z) = 3z^4 + 2z$ trovare le soluzioni complesse z di $P(z) = 0$.
(2) Determinare tutte le soluzioni reali x di $3x^4 + 2x = 0$.
(3) Riscrivere il polinomio $P(x) = 3x^4 + 2x$ come prodotto di polinomi di primo o secondo grado nella variabile x a coefficienti reali.

Soluzioni. (1) Il polinomio si riscrive come $P(z) = z(3z^3 + 2)$ ed una sua soluzione è $z = 0$. Le altre soluzioni sono date da $3z^3 + 2 =$ ossia le radici terze complesse del numero $w = -2/3$. Dato che $w = 2/3e^{i\pi}$ le sue radici terze sono $z_1 = -\sqrt[3]{2/3}$, $z_2 = \sqrt[3]{2/3}(1 + \sqrt{3}i)/2$, $z_3 = \sqrt[3]{2/3}(1 - \sqrt{3}i)/2$.

(2) Dato che le radici $z_2 = \sqrt[3]{2/3}(1 + \sqrt{3})/2$, $z_3 = \sqrt[3]{2/3}(1 - \sqrt{3})/2$ trovate nel punto precedente non sono numeri reali, le soluzioni reali sono solo $x_1 = 0$ ed $x_2 = \sqrt[3]{2/3}$.

(3) Si ha la decomposizione complessa $P(z) = 3z(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)$. Date le due radici reali si ha che $P(x) = 3x(x + \sqrt[3]{2/3})Q(x)$ e $Q(x)$ può essere calcolato o facendo la divisione tra polinomi o moltiplicando i due termini $(x - z_2)(x - z_3)$ dove z_2, z_3 sono le due radici coniugate sopra. Risulta $Q(x) = x^2 - \sqrt[3]{2/3}x + \sqrt[3]{4/9}$.

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x\cos(3x)}{e^{x^3}-\sqrt{1-x^3}};$$
$$(b)\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3^x+1)+\sin(x)}{\sqrt{2+3x^2}}.$$

Soluzioni.

(a) Calcoliamo lo sviluppo al terzo ordine di numeratore e denominatore. Per questo calcoliamo:

$$\sin(2x)=2x-\frac{(2x)^3}{6}+o(x^3),$$
$$\cos(3x)=1-\frac{9x^2}{2}+o(x^2)$$

da cui

$$\sin(2x)-2x(\cos(3x))=2x-\frac{4}{3}x^3-2x+9x^3+o(x^3)=\frac{23}{3}x^2+o(x^3).$$

Per il denominatore abbiamo:

$$e^t=1+t+o(t);\qquad \sqrt{1+t}=1+\frac{1}{2}t+o(t);$$

da cui otteniamo

$$e^{x^3}-\sqrt{1-x^3}=1+x^3-1+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)=\frac{3}{2}x^3+o(x^3).$$

e dunque il limite cercato diventa

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2x\cos(3x)}{e^{x^3}-\sqrt{1-x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{23}{3}x^2+o(x^3)}{\frac{3}{2}x^3+o(x^3)}=\frac{46}{9}.$$

(b) Notiamo che

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{2+3x^2}}=0$$

e calcoliamo invece

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3^x+1)}{\sqrt{2+3x^2}}$$

Derivando il numeratore abbiamo

$$\mathrm{D}(\ln(3^x+1))=\ln(3)\frac{3^x}{3^x+1};\qquad \lim_{x\to +\infty}\ln(3)\frac{3^x}{3^x+1}=\ln(3);$$

mentre derivando il denominatore otteniamo:

$$\mathrm{D}(\sqrt{2+3x^2})=\frac{3x}{\sqrt{2+3x^2}};\qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x}{\sqrt{2+3x^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3^x+1)+\sin(x)}{\sqrt{2+3x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(3^x+1)}{\sqrt{2+3x^2}}+\lim_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{\sqrt{2+3x^2}}=$$

(applichiamo quindi il teorema di de l'Hôpital all'addendo sinistro)

$$=\frac{\ln(3)}{\sqrt{3}}+0=\frac{\ln(3)}{\sqrt{3}}.$$

Esercizio 3. Sia $f(x) = 2 - x^2 e^{x^3}$, definita per $x \in \mathbb{R}$.

(1) Determinare le zone di monotonia di f ed eventuali massimi e minimi locali.
(2) Determinare le zone di convessità e concavità di f.
(3) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione.
(4) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha più di una soluzione.

Soluzioni.

(1) Deriviamo $f(x)$:

$$f'(x) = -2xe^{x^3} + 3x^4 e^{x^3} = -(2 + 3x^3)xe^{-x^3}.$$

Il fattore $-e^{x^3}$ è sempre negativo. Il fattore $(2 + 3x^3)x$ è un polinomio che si annulla (con molteplicità 1) per $x = 0$ e $x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ (si veda l'Esercizio 1) e che è strettamente negativo per $-\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < x < 0$. Ne segue che $f'(x)$ è positiva per $-\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < x < 0$ e negativa per $0 < x$ e $x < -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Dunque $f(x)$ è crescente per per $-\sqrt[3]{\frac{2}{3}} < x < 0$ e decrescente per $0 > x$ e $x < -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Il punto $x = 0$ è un massimo locale (in cui $f(0) = 2$), mentre il punto $x = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ è un minimo locale (con $f(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}) = 2 - \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}}$).

(2) Calcoliamo la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = -(9x^6 + 18x^3 + 2)e^{x^3}.$$

Il segno della derivata seconda è determinato dal segno del polinomo $p(t) = 9t^2 + 18t + 2$ per $t = x^3$. Il polinomio $p(t)$ si annulla per $t_1 = -1 + \frac{\sqrt{7}}{3}, t_2 = -1 - \frac{\sqrt{7}}{3}$. Il polinomo è positivo all'esterno dell'intervallo $[t_1, t_2]$ e negativo all'interno. Dunque $f(x)$ è concava per $x < \sqrt[3]{-1 - \frac{\sqrt{7}}{3}}$ e per $x > \sqrt[3]{-1 + \frac{\sqrt{7}}{3}}$, mentre è convessa per $\sqrt[3]{-1 - \frac{\sqrt{7}}{3}} < x < \sqrt[3]{-1 + \frac{\sqrt{7}}{3}}$.

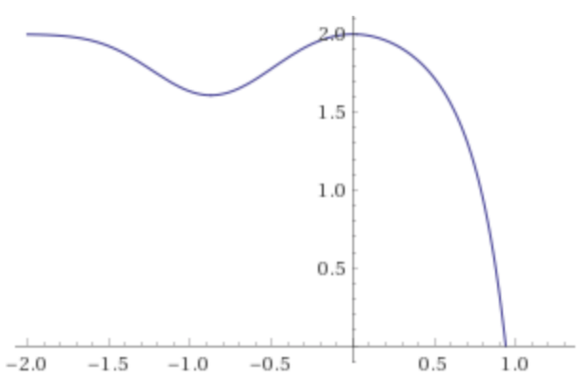

Grafico della funzione $f(x)$

(3) Abbiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

e inoltre $f(x) \leq 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e quindi $f(x)$ assume un minimo assoluto nel punto $x = 0$ con valore $f(0) = 0$. Quindi f assume tutti e soli i valori compresi tra 2 e $-\infty$. Dunque l'equazione $f(x) = \beta$ ammette soluzione se e solo se $\beta \leq 2$.

(4) Poichè $f(x)$ è strettamente decrescente in $[0, \infty)$, in quell'intervallo $f(x)$ assume esattamente una volta ogni valore in $[2, -\infty)$. Nell'intervallo $(-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, 0)$ la funzione $f(x)$ è crescente e quindi assume una seconda volta tutti i valori in $(2 - \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}, 2)$. Infine in $(-\infty, -\sqrt[3]{\frac{2}{3}})$ la funzione $f(x)$ è di nuovo decrescente e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$, quindi $f(x)$ assume una terza volta tutti i valori in $(2 - \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}}, 2)$. Quindi $f(x) = \beta$ ammette più di una soluzione se e solo se $2 - \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \leq \beta < 2$.