Compito di Istituzioni di Matematica, Seconda parte

8 gennaio 2020

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ si consideri il sistema

$$\begin{cases} (t+1)x + y + 10z = -(t+1) \\ -3x + 2y - 13z = 1 \\ 2x - 3y + 4tz = 1 \end{cases}$$

(1) Determinare per quali valori di t il sistema ha o meno soluzione, stabilendone la numerosità.
(2) Risolvere il sistema per $t = 1$.
(3) Per $t = 3$ scrivere esplicitamente l'applicazione lineare $T(x, y, x)$ associata e determinarne una base del nucleo.

Soluzione.

(1) Il determinante della matrice incompleta è $8t^2 - 19t - 15 = (t-3)(8t+5)$ e dunque il suo rango è 3 per $t \neq 3, -\frac{5}{8}$. Quindi il sistema ha sempre soluzione per $t \neq 3, -\frac{5}{8}$ ed essa è unica. Per $t = 3$ e $t = -\frac{5}{8}$ la matrice incompleta ha rango minore di 3, mentre la matrice completa ha rango 3 (infatti il determinante del minore 3×3 fatto con prima, seconda e quarta colonna è in entrambi i casi pari a 5). Dunque in questo caso il sistema non ha soluzione.

(2) Per $t = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} 2x + y + 10z = -2 \\ -3x + 2y - 13z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

che ridotto a scala da come unica soluzione $(x, y, z) = (\frac{5}{26}, -\frac{6}{13}, -\frac{5}{26})$.

(3) Per $t = 3$ l'applicazione lineare associata al sistema è $T(x, y, z) = (4x + y + 10z, -3x + 2y - 13z, 2x - 3y + 12z)$. Il suo nucleo è quindi dato dalle equazioni

$$\begin{cases} 4x + y + 10z = 0 \\ -3x + 2y - 13z = 0 \\ 2x - 3y + 12z = 0 \end{cases}$$

Sappiamo già che il sistema ha rango minore di 3 e visto che le prime due equazioni sono linearmente indipendenti (per vederlo possiamo guardare il determinante del minore fatto coi primi due coefficienti, che è diverso da 0) vediamo che il rango è 2, quindi possiamo risolvere le prime due equazioni:

$$\begin{cases} 4x + y + 10z = 0 \\ 2x - 3y + 12z = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo $y = 2z, x = -3z$ e dunque il nucleo di T ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $(-3, 2, 1)$ che è una base del nucleo stesso.

Esercizio 2. Data la funzione $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2}) + x$ stabilire le eventuali zone in cui è concava e se f ammette asintoti. Calcolare poi la primitiva di f che in $x = 1$ vale -3.

Soluzione.

Si nota che $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x \; x \in \mathbb{R}$ e risulta

$$f'(x) = \frac{x}{1+x^2} + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{-}x^2 1 + x^2 \; x \in \mathbb{R}$$

da cui si deduce che f è concava sull'intervallo $[1, +\infty)$ e sull'intervallo $(-\infty, -1]$, separatamente. Si ha anche

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty$$

da cui si deduce che non esistono asintoti obliqui (il coefficente angolare della retta sarebbe 1 ma il termine noto vale $+\infty$), ne' orizzontali, ne' verticali (f è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$).

Per calcolare la primitiva si integra il primo termine di f per parti

$$\int \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,dx = x\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = x\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x + \arctan(x) + c$$

da cui la famiglia di primitive di f è data da

$$\frac{x^2}{2} + x\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x + \arctan(x) + c$$

e la primitiva cercata è

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x + \arctan(x) - 3 + \frac{\pi}{4} + \frac{1-\ln(2)}{2}.$$

Esercizio 3. Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{y^2}$$

calcolare la soluzione tale che $y(0) = -1$ e trovarne massimo e minimo su $[0, 2\pi]$.

Soluzione. Si tratta di una equazione a variabili separabili per cui si integra tra 0 e x ottenendo

$$\int_{y(0)}^{y(x)} y^2\,dy = \int_0^x 2\sin(t)\cos(t)\,dt$$

e

$$\frac{y^3(x)}{3} - \frac{y^3(0)}{3} = \sin^2(x) - \sin^2(0).$$

Ponendo $y(0) = -1$ si ha

$$y(x) = \sqrt[3]{3\sin^2(x) - 1}.$$

Si tratta di una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato per cui i punti di massimo o minimo (che esistono) si trovano o sul bordo $0, \pi$, oppure negli zeri della derivata. Usando che $y' = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{y^2}$ gli unici candidati sono $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. Si deduce che il massimo della funzione è $\sqrt[3]{2}$ ed il minimo è $\sqrt[3]{-1} = -1$.

(Si poteva anche semplicemnte notare che la funzione $\sin^2(x)$ assume su $[0, 2\pi]$ tutti i valori tra 0 ed 1 per cui il valore massimo di vede subito che è ottenuto per $\sin^2(x) = 1$ e minimo per $\sin^2(x) = 0$.)

Esercizio 4. Scrivere in forma esponenziale i numeri complessi

$$\alpha = 1 - \sqrt{3}i \quad \text{e} \quad \beta = \frac{2i-1}{2+i} + 1.$$

Trovare poi, in forma esponenziale, le soluzioni complesse di $\bar{\alpha} z^4 + \beta^2 = 0$.

Soluzione.

Abbiamo che $|\alpha| = \sqrt{1+3} = 2$ e $\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos(\frac{-\pi}{3}) + i\sin(\frac{-\pi}{3})$. Dunque in forma esponenziale

$$\alpha = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Calcoliamo β:

$$\beta = \frac{2i-1}{2+i} + 1 = \frac{2i-1+2+i}{2+i} = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{5+5i}{5} = 1+i = \sqrt{2}\big(\cos\big(\frac{\pi}{4}\big) + i\sin\big(\frac{\pi}{4}\big)\big)$$

e dunque

$$\beta = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Abbiamo inoltre che

$$\overline{\alpha} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ e } \beta^2 = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

e quindi l'equazione $\overline{\alpha}z^4 + \beta^2 = 0$ si può riscrivere come

$$z^4 = -\frac{\beta^2}{\overline{\alpha}} = -\frac{2e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{3} + i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Detto θ l'argomento di z abbiamo quindi che $4\theta = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ e quindi $\theta = \frac{5\pi+12k\pi}{24}$ Le soluzioni sono dunque i numeri complessi $z_k = e^{i\frac{5\pi+12k\pi}{24}}$ per $k = 0, 1, 2, 3$.