Compito di Ist. Mat., Seconda parte, Tema XY

6 settembre 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

Sia $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base $\mathcal{B}$ del nucleo di L.
b) Trovare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga la base $\mathcal{B}$ trovata nel punto precedente.
c) Trovare una base dell'immagine di L.
d) Dire se il vettore $w = (1, 8, -3, -2)$ appartiene all'immagine di L e eventualmente trovare un vettore v tale che $L(v) = w$.

Soluzione.

a) Chiamiamo v_1, v_2, v_3, v_4 le colonne della matrice associata ad L. La seconda colonna della matrice è la somma della prima e della terza colonna, ovvero $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Quindi il vettore $w_1 = (1, -1, 1, 0)$ appartiene al nucleo. La quarta colonna è la differenza della prima colonna meno la terza colonna, ovvero $v_1 - v_3 - v_4 = 0$. Quindi anche il vettore $w_2 = (1, 0, -1, -1)$ appartiene al nucleo. Inoltre le prime due colonne sono linearmente indipendenti. Ne segue che l'applicazione L ha rango 2 e dunque una base del suo nucleo è fatta da $4 - 2 = 2$ vettori. Visto che w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti possiamo scegliere $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$.

In alternativa era sempre possibile mettere la matrice di L in forma di Gauss tramite operazioni di riga per trovare due elementi che generano il nucleo.

b) Consideriamo la matrice che ha per colonne i vettori w_1, w_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il minore 2×2 fatto con le prime due righe ha determinante non nullo. Quindi possiamo completare la matrice aggiungendo le colonne $w_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $w_4 = (0, 0, 0, 1)$ ed otteniamo la matrice 4×4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

che ha determinante diverso da 0. Dunque l'insieme $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ che ovviamente contiene $\mathcal{B}$.

c) Visto che L ha rango 2, basta scegliere due vettori indipendenti che appartengano all'immagine. Ad esempio l'indieme dei vettori $v_1 = (1, 2, 0, 1)$ e $v_2 = (2, 2, 1, 3)$, che corrispondono alle prime due colonne della matrice associata ad L, è una base dell'immagine.

d) Visto che l'immagine di L è generata dalle prime due colonne della matrice associata ad L, è sufficiente mettere in forma di Gauss la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

e otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi w appartiene all'immagine di L e abbiamo che preso $v = (7, -3, 0, 0)$ vale $L(v) = w$.

Esercizio 2.

a) Trovare un numero reale $a \in \mathbb{R}$ tale che $z = -i$ sia una radice del polinomio

$$P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + a.$$

b) Per il valore di a trovato sopra trovare tutti gli zeri del polinomio $P(z)$.

c) Trovare le radici terze di tutti gli zeri di $P(z)$ che sono stati trovati nel punto precedente.

Soluzione.

a) Sostituendo $z = -i$ otteniamo $P(-i) = i + 1 - i + 1 + a$ che si annulla per $a = -1$. Dunque per $a = -2$ abbiamo che $z = -i$ è radice di $P(z)$.

b) Per $a = -2$ possiamo riscrivere $P(z) = z^3 - z^2 + z - 1$ raccogliendo i termini con coefficiente negativo: $P(z) = z(z^2 + 1) - (z^2 + 1) = (z - 1)(z^2 + 1)$. Le radici sono dunque $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$.

c) Le radici terze di 1 sono $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Per calcolare le radici terze di i notiamo che $(-i)^3 = i$ e quindi $-i$ è una di esse. Possiamo trovare le altre moltiplicando $-i$ per una radice terza di 1. Le tre radici sono quindi: $\beta_1 = -i, \beta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \beta_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$.

Analogamente per le radici terze di $-i$ notiamo che $(i)^3 = -i$ e quindi i è una di esse. Possiamo trovare le altre moltiplicando i per una radice terza di 1. Le tre radici sono quindi: $\gamma_1 = i, \gamma_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, \gamma_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Esercizio 3. Data $f(x) = \ln(x^2 - 6x) + 2\ln\left(\frac{x-6}{x}\right)$, determinarne dominio, estremi superiore ed inferiore, eventuali massimi e minimi locali/assoluti, asintoti e zone di convessità.

Soluzione. La funzione data ha come dominio gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $x(x-6) > 0$, vale a dire $D = (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. La funzione può essere riscritta su D per $x > 6$ come

$$f(x) = \ln(x-6) + \ln(x) + 2\ln(x-6) - 2\ln(x) = 3\ln(x-6) - \ln(x)$$

e per $x < 0$ come

$$f(x) = \ln(6-x) + \ln(-x) + 2\ln(6-x) - 2\ln(-x) = 3\ln(6-x) - \ln(-x).$$

f è infinite volte derivabile su D e vale

$$f'(x) = \frac{3}{x-6} - \frac{1}{x} = 2\frac{x+3}{x(x-6)}; \quad f''(x) = -\frac{3}{(x-6)^2} + \frac{1}{x^2} = -2\frac{x^2+6x-18}{x^2(x-6)^2}.$$

Se ne deduce che f è decrescente su $(-\infty, -3)$ e crescente su $(-3, 0)$ con un minimo locale in $x = -3$ che vale $5\ln(3)$; f è inoltre crescente su $(6, +\infty)$. Poiché $x^2 + 6x - 18 = 0$ se e solo se $x = -3 \pm 3\sqrt{3}$ e $0 < -3 + 3\sqrt{3} < 6$ si ha che f è concava su $(-\infty, -3 - 3\sqrt{3})$, convessa su $(-3 - 3\sqrt{3}, 0)$ e concava su $(6, +\infty)$. Rimangono da fare limiti agli estremi del dominio. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-6}{x}\right) = \ln(1) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \ln(x^2 - 6x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\ln(x^2-6x)}{x} = 0$$

da cui f diverge positivamente a $\pm\infty$ ma non ha asintoti obliqui a $\pm\infty$. Si ha poi

$$\lim_{x\to 6+} f(x) = \lim_{x\to 6+} 3\ln(x-6) - \ln(x) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 3\ln(6-x) - \ln(-x) = +\infty.$$

Da questi limiti si ottiene che $\sup f = +\infty$ ed $\inf f = -\infty$.

Esercizio 4. Determinare le soluzioni generali delle seguenti equazioni differenziali

(1) $y'(x) - y(x) = x$;

(2) $y'(x) - 2y(x) = 2x\sqrt{y(x)}$.

Soluzione. 1) Si tratta dii una equazione lineare del primo ordine con soluzione dell'omogenea generata da e^x. Per trovare una soluzione particolare si può usare la formula o notare che il termine che non contiene y è lineare e cercare quindi una soluzione di tipo lineare $u(x) = Ax+B$. Imponendo che u risolva l'equazione si ottiene $A = -1, B = -1$, ossia $1-x$ è una soluzione particolare. La soluzione generale è data quindi da $y(x) = -1 - x + ce^x$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

2) Si tratta di una equazione di Bernoulli. $y \equiv 0$ è una soluzione, ogni altra soluzione y è comunque non negativa visto che appare la sua radice. Cerchiamo ora le soluzioni y non nulle per cui si divide l'equazione per $2\sqrt{y}$. Si ha

$$\frac{y'(x)}{2\sqrt{y(x)}} - \frac{y(x)}{\sqrt{y(x)}} = x$$

che è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{y(x)}\right) - \sqrt{y(x)} = x.$$

Posto $w(x) = \sqrt{y(x)}$ si ha che w risolve l'equazione al punto 1), ossia $\sqrt{y(x)} = w(x) = -1 - x + ce^x$, funzione definita a c fissato per gli x tali che $-1 - x + ce^x \geq 0$. Elevando al quadrato si ottiene che le soluzioni di 2) sono y identicamente nulla oppure $y(x) = (-1 - x + ce^x)^2$ al variare di c in $\mathbb{R}$ con dominio di definizione $\{x : -1 - x + ce^x \geq 0\}$.