Soluzioni del Compito di Ist. Mat., Seconda parte, Tema XY

4 giugno 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

a) Calcolare le radici terze di $z = i$ scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica.

b) Sia $p(z)$ il polinomio $z^4 - (1+i)z^3 - 2iz - 2 + 2i$. Sapendo che $1+i$ è una radice di $p(z)$, calcolare tutte le radici, scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica o esponenziale.

c) Riguardo alle radici del polinomo del punto precedente, quale radice ha il valore assoluto più piccolo?

Soluzione.

a) Possiamo scrivere i in forma trigonometrica come $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ e dunque le sue radici terze in forma esponenziale/trigonometrica sono:

$$w_k = e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{2k\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

per $k = 0, 1, 2$. Otteniamo dunque in forma algebrica i valori $w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ $w_2 = -i$.

b) Dividendo per $z - 1 - i$ vediamo che il polinomio $p(z)$ si fattorizza come

$$p(z) = (z-1-i)(z^3 - 2i)$$

e dunque le radici di $p(z)$ sono rispettivamente

$$z_0 = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i},$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{2\pi}{3}i},$$

$$z_3 = -\sqrt[3]{2}i = \sqrt[3]{2}e^{\frac{\pi}{6}i + \frac{4\pi}{3}i}.$$

c) La radice z_0 ha valore assoluto $|z_0| = \sqrt{2}$, mentre le radici z_1, z_2, z_3 hanno valore assoluto $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$. Quindi le tre radici z_1, z_2, z_3 hanno valore assoluto più piccolo, uguale per tutte e tre.

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2.

Si consideri al variare di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x, y, z) = (tx - 12z, x + ty + z, y + z)$$

a) Scrivere la matrice associata ad f e calcolarne il rango al variare di t.
b) Calcolare la dimensione dell'immagine e del nucleo di f per $t = -4, -3, -2, -1$,0, 1,2, 3,4,5.
c) Per $t = 0$ e per $t = 4$ trovare una base del nucleo di f.
d) Per $t = -3$ trovare un'equazione che descriva l'immagine di f.

Soluzione.

a) La matrice associata ad f è

$$\begin{pmatrix} t & 0 & -12 \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $t^2 - t - 12 = (t - 4)(t + 3)$. Dunque per $t \neq -3, 4$ il suo rango è 3. Per $t = -3, 4$ il rango della matrice è 2, perchè il determinante del minore 2×2 fatto con le prime due righe e le prime due colonne è non nullo.

b) Per quanto visto nel punto precedente circa il rango della matrice, abbiamo che per $t = -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4, 5$ la dimensione dell'immagine è 3 e, per il teorema della dimensione, la dimensione del nucleo è $3 - 3 = 0$. Invece per $t = -3, t = 4$ abbiamo che la dimensione dell'immagine è 2 e quindi, per il teorema della dimensione, la dimensione del nucleo è $3 - 2 = 1$.

c) Per $t = 0$ la dimensione del nucleo è 0, quindi la sua base è vuota. Per $t = 4$ la dimensione del nucleo è 1. La matrice per $t = 4$ è

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque un vettore non nullo che sta nel nucleo è $v = (3, -1, 1)$. Dunque $\{v\}$ è anche una base di $\ker f$.

d) Per $t = -3$ l'immagine è generata dalle colonne della matrice, ovvero dalle colonne di

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -12 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La terza colonna è dipendente dalle prime due, dunque l'immagine è generata da $v_1 = (3, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 3, 1)$. Per trovare un'equazione che definisca lo spazio generato da v_1 e v_2 possiamo quindi porre a zero il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & x \\ 1 & 3 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix}$$

e dunque abbiamo che un vettore $w = (x, y, z)$ appartiene all'immagine di f per $t = 3$ se e solo se vale

$$x - 3y + 9z = 0.$$

Esercizio 3. Data $f(x) = e^{-x}(x^2 + 2x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$

(1) determinarne eventuali massimi e minimi locali;
(2) determinare le zone in cui f è convessa.
(3) calcolarne l'integrale su $[-2, -1]$;
(4) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione.

Soluzione. $(1), (2)$ f è derivabile infinite volte e si ha

$$f'(x) = e^{-x}(2 - x^2), \qquad f''(x) = e^{-x}(x^2 - 2x - 2).$$

Si calcola subito che $f'(x) = 0$ se e solo se $x = \pm\sqrt{2}$ e $f''(x) \geq 0$ se e solo se $x \geq 1 + \sqrt{3}$ oppure $x \leq 1 - \sqrt{3}$. Da qui si deduce subito che f è convessa su $x \geq 1 + \sqrt{3}$ oppure su $x \leq 1 - \sqrt{3}$.

Per capire la natura dei punti stazionari $\pm\sqrt{2}$ si può usare il segno della derivata oppure calcolare il valore della derivata seconda nei punti stessi. Si verifica che $-\sqrt{2} < 1 - \sqrt{3} < \sqrt{2} < 1 + \sqrt{3}$ per cui $-\sqrt{2}$ è un punto di minimo locale e $\sqrt{2}$ è un punto di massimo locale. L'unico minimo locale è quindi $2(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$ (ed anche assoluto perchè f tende a 0 a $+\infty$ ed a $+\infty$ a $-\infty$) e $2(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$ è l'unico massimo locale (ma non assoluto dato che $\sup f = +\infty$).

(3) Si procede integrando per parti.

$$\int e^{-x}(x^2 + 2x)\,dx = -e^{-x}(x^2 + 2x) + \int e^{-x}(2x + 2)\,dx =$$
$$-e^{-x}(x^2 + 2x) - e^{-x}(2x + 2) + \int e^{-x}(2)\,dx =$$
$$-e^{-x}(x^2 + 2x) - e^{-x}(2x + 2) - 2e^{-x} + c = -e^{-x}(x + 2)^2 + c$$

da cui

$$\int_{-2}^{-1} e^{-x}(x^2 + 2x)\,dx = -e^{-x}(x + 2)^2|_{-2}^{-1} - e.$$

(4) L'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione se e solo se $\beta \in Im(f)$. Dal conto precedente, usando il fatto che l'immagine di una funzione continua è un intervallo di estremi inf/min, sup/max, si deduce che $Im(f) = [2(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}, +\infty)$. Quindi $f(x) = \beta$ ha soluzione se e solo se $\beta \geq 2(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$.

Esercizio 4.

(1) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y^2y' = 3 - e^{3-x}$ tale che $y(3) = 3$;
(2) determinare poi massimo e minimo della funzione sopra ristretta all'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione. (1) Si procede integrando le variabili separatamente e si ottiene

$$y^3(x) = 3(3x + e^{3-x} + c) \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{3(3x + e^{3-x} + c)}.$$

Imponendo $y(3) = 3$ si ha $27 = 3(9 + 1 + c)$ ossia $c = -1$ e

$$y(x) = \sqrt[3]{3(3x + e^{3-x} - 1)}.$$

(2) La funzione sopra è continua su $[0, 1]$ per cui ammette di sicura valori massimo e minimo. I candidati ad essere punti di max/min sono i valori negli estremi dell'intervallo, $0, 1$ ed i punti in cui si annulla la derivata. Dato che y risolve $y' = (3 - e^{3-x})/y^2$, senza ri-derivare, si vede subito che l'unico punto x_0 in cui $y'(x_0) = 0$ è tale che $3 - x_0 = \ln(3)$, vale a dire $x_0 = 3 - \ln(3)$. Rimane da vedere se x_0 appartiene all'intervallo $[0, 1]$. La condizione da verificare è se vale $3 - \ln(3) < 1$, questo equivale a $2 < \ln(3)$, che è a sua volte equivalente a $e^2 < 3$ ma questo è falso perché il numero e è un numero che sta tra 2 e 3, per cui $e^2 > 4 > 3$. I punti di max e minimo devono allora coincidere con gli estremi dell'intervallo. Senza fare il conto di chi due due valori $y(0)$ ed $y(1)$ sia più grande si può osservare che, visto che la derivata non ha zeri in $[0, 1]$, ed è continua, essa ha segno costante sull'intervallo $[0, 1]$. Si calcola il suo valore $y'(1) = (3-e^2)/y^2(1) < 0$, e si deduce che y è decrescente su $[0, 1]$. Il valore massimo è quindi $y(0) = \sqrt[3]{3e^3 - 3}$ ed il suo valore minimo è $y(1) = \sqrt[3]{3e^2 + 6)}$.

Soluzioni del Compito di Ist. Mat., Seconda parte, Tema ZW

4 giugno 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1.

a) Calcolare le radici terze di $z = -i$ scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica.

b) Sia $p(z)$ il polinomio $z^4 + (2+i)z^3 + 3iz - 3 + 6i$. Sapendo che $-2-i$ è una darice di $p(z)$, calcolare tutte le radici, scrivendole sia in forma algebrica, sia in forma trigonometrica o esponenziale.

c) Riguardo alle radici del polinomo del punto precedente, quale radice ha il valore assoluto più grande?

Istruzioni: Verranno corrette solo le risposte scritte su questo foglio. La soluzione di ogni esercizio deve essere giustificata con i passaggi fondamentali del procedimento e scritta nello spazio bianco sotto ad ogni esercizio.

Esercizio 2. Si consideri al variare di $t \in \mathbb{R}$ l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$f(x, y, z) = (tx - 6z, x + ty - z, y + z)$$

a) Scrivere la matrice associata ad f e calcolarne il rango al variare di t.

b) Calcolare la dimensione dell'immagine e del nucleo di f per $t = -4, -3, -2, -1, 0$,$1, 2, 3$,$4, 5$.

c) Per $t = 0$ e per $t = -3$ trovare una base del nucleo di f.

d) Per $t = 2$ trovare un'equazione che descriva l'immagine di f.

Esercizio 3. Data $f(x) = e^x(x^2 - 2x)$, definita per $x \in \mathbb{R}$

(1) determinarne eventuali massimi e minimi locali;
(2) determinare le zone in cui f è convessa.
(3) calcolarne l'integrale su $[1, 2]$;
(4) Determinare per quali $\beta \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x) = \beta$ ha soluzione.

Esercizio 4.

(1) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale $y^2y' = 3 - e^{3-x}$ tale che $y(0) = 1$;
(2) determinare poi massimo e minimo della funzione sopra ristretta all'intervallo $[0, 1]$.