Esercizi vari su esponenziali/logaritmi/valore assoluto/sup ed inf/grafici.

1) Esplicitare la forma della funzione in dipendenza x (vale a dire eliminando la presenza del modulo) e disegnare il grafico della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da:

$$a)\ f(x) = |x^2 - 5|x| + 4|; \quad b)\ f(x) = |2x^2 - 3|x| - 20|;$$

$$c)\ f(x) = |1 - 2|x - 3||; \quad d)\ f(x) = |\ln(2^{3x} + 1) - 3| - 2.$$

Soluzione. $a)$ Usando la definizione di $|x|$ si ha che la funzione f vale

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 5x + 4| & \text{se } x \geq 0 \\ |x^2 + 5x + 4| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Per esplicitare ulteriormente la funzione, ossia liberarsi del simbolo $|\ |$, si deve tenere conto che se g è una espressione in x, $|g(x)|$ è uguale a $g(x)$ per gli x per cui $g(x) \geq 0$ e $-g(x)$ altrove. Definiti gli insiemi $A_1 = \{x : x^2 - 5x + 4 \geq 0\}$ ed $A_2 = \{x : x^2 + 5x + 4 \geq 0\}$ si ha

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \in A_1 \\ 5x - x^2 - 4 & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \notin A_1 \\ x^2 + 5x + 4 & \text{se } x < 0 \text{ e } x \in A_2 \\ -x^2 - 5x - 4 & \text{se } x < 0 \text{ e } x \notin A_2 \end{cases}$$

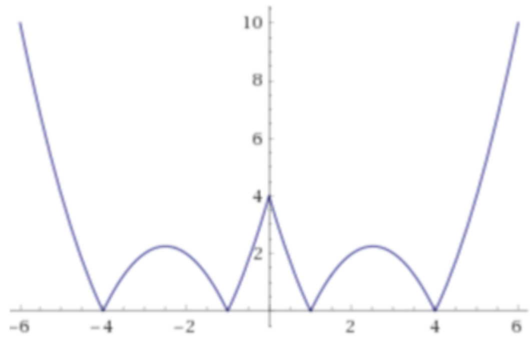
Risolvendo $A_1 = (-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ e $A_2 = (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$, si ottiene

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & \text{se } [0, 1] \cup [4, +\infty) \\ 5x - x^2 - 4 & \text{se } x \in (1, 4) \\ x^2 + 5x + 4 & \text{se } x \in (-\infty, -4] \cup [-1, 0] \\ -x^2 - 5x - 4 & \text{se } x \in (-4, -1). \end{cases}$$

Notare che la funzione è pari, infatti

$$f(-x) = |(-x)^2 - 5| - x| + 4| = |x^2 - 5|x| + 4| = f(x)$$

per cui il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse $x = 0$. In particolare basta disegnare la parabola $y = x^2 - 5x + 4$ per $x \geq 0$ e ribaltarne la parte negativa e fare la stessa cosa per la parabola $y = x^2 + 5x + 4$ per $x < 0$ (oppure ribaltare il grafico ottenuto per $x \geq 0$ rispetto all'asse delle y).



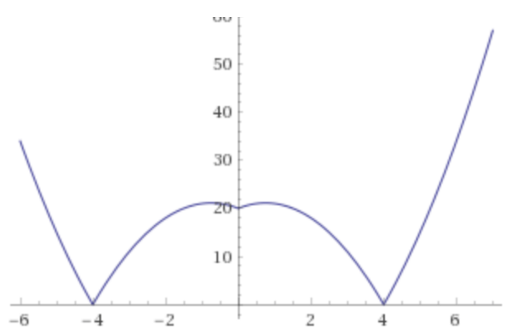
b) Si procede analogamente notando che $2x^2 - 3x - 20 = (2x+5)(x-4)$ e $2x^2 + 3x - 20 = (2x-5)(x+4)$ e

$$\{x : 2x^2 - 3x - 20 \geq 0\} = (-\infty, -5/2] \cup [4, +\infty)$$
$$\{x : 2x^2 + 3x - 20 \geq 0\} = (-\infty, -4] \cup [5/2, +\infty),$$

da cui

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 20 & \text{se } x \in [4, +\infty) \\ 3x + 20 - 2x^2 & \text{se } x \in [0, 4) \\ 2x^2 + 3x - 20 & \text{se } x \in (-\infty, -4] \\ 20 - 2x^2 - 3x & \text{se } x \in (-4, 0) \end{cases}$$

Il grafico anche qui può essere ottenuto come nel punto a).



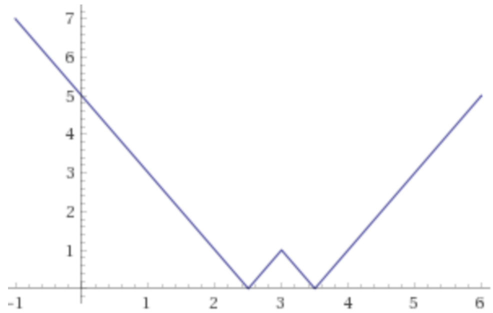
c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} |7 - 2x| & \text{se } x \geq 3 \\ |2x - 5| & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{se } x \geq 3,5 \\ 7 - 2x & \text{se } 3 \leq x < 3,5 \\ 2x - 5 & \text{se } 2,5 \leq x < 3 \\ 5 - 2x & \text{se } x < 2,5 \end{cases}$$

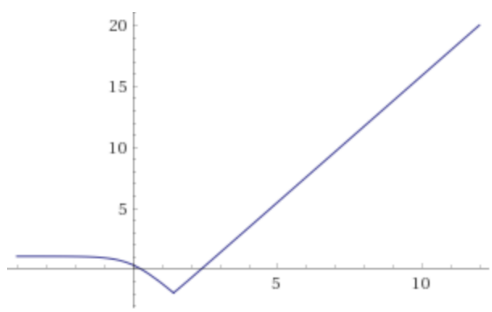
Il grafico segue facilmente disegnando 4 rette che si incontrano due a due nei punti $(2,5,0)$, $(3,1)$, $(3,5,0)$ e di pendenza 2 tra i punti di ascissa compresa $2,5$ 3 ed a destra del punto di ascissa $3,5$ e pendenza -2 tra i punti di ascissa compresa 3 e $3,5$ ed a sinistra del punto $2,5$.



$d)$ Si studia la disequazione $\ln(2^{3x}+1) \geq 3$ che è equivalente a $\ln(2^{3x}+1) \geq \ln(e^3)$ ed a $2^{3x} \geq e^3 - 1$, ossia $3x \geq \log_2(e^3-1)$. Si ha quindi

$$f(x) = \begin{cases} \ln(2^{3x}+1) - 5 & \text{se } x \geq \log_2(\sqrt[3]{e^3-1}) \\ 1 - \ln(2^{3x}+1) & \text{se } x < \log_2(\sqrt[3]{e^3-1}) \end{cases}$$

Anche se non è banale capire la concavita' della f all'infinito si puoò tracciare un grafico approssimativo come in figura.



2) Risolvere le seguenti equazioni/disequazioni:

$a)$ $|x-5| = |x-6| - |x-1|$; $\quad b)$ $3 - \log_2(e) \geq \ln(\log_2(x))$; $\quad c)$ $e^{x^2} \geq 2e^x$;

$d)$ $\sqrt{1-\sqrt[3]{x}} \leq \sqrt[3]{x}$; $\quad e)$ $\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}} > 1 + \sqrt[5]{x^2}$; $\quad f)$ $\log_5(x^{2x}) > \log_3(x^x)$.

Soluzione. $a)$ Si risolvono i seguenti sistemi

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x-5 = x-6-(x-1) \end{cases} \cup \begin{cases} 5 \leq x < 6 \\ x-5 = 6-x-(x-1) \end{cases} \cup$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ 5-x = 6-x-(x-1) \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ 5-x = 6-x-(1-x) \end{cases}$$

equivalenti a

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 5 \leq x < 6 \\ 3x = 12 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \leq 5 \\ x = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

da cui l'unica soluzione è $x = 2$.

b) Si riscrive la disequazione usando il fatto che $\log_2(e) = 1/\ln(2)$

$$3 - \log_2(e) \geq \ln(\log_2(x)) \iff 3 \geq 1/\ln(2) + \ln(\log_2(x))$$

Si usa poi che $\ln(2) > 0$ e che $\ln(e) = 1$

$$\iff 3\ln(2) \geq 1 + \ln(2)\ln(\log_2(x)) \iff \ln(2^3) \geq \ln(e(\log_2(x))^{\ln(2)})$$

Per la crescenza della funzione logaritmo in base e si ha che

$$\ln(2^3) \geq \ln(e(\log_2(x))^{\ln(2)}) \iff 2^3 \geq e(\log_2(x))^{\ln(2)} \iff \frac{8}{e} \geq (\log_2(x))^{\ln(2)}$$

ossia

$$\iff \left(\frac{8}{e}\right)^{1/\ln(2)} \geq \log_2(x) \iff \left(\frac{8}{e}\right)^{\log_2(e)} \geq \log_2(x)$$

da cui applicando l'esponenziale in base 2 alla disuguaglianza (che è mantenuta per crescenza di $z \to 2^z$)

$$3 - \log_2(e) \geq \ln(\log_2(x)) \iff 2^{(\frac{8}{e})^{\log_2(e)}} \geq x.$$

Si noti che $8^{\log_2(e)} = 2^{3\log_2(e)} = e^3$ da cui $(\frac{8}{e})^{\log_2(e)} = e^{3-\log_2(e)}$.

c) Si riscrive

$$e^{x^2} - 2e^x \geq 0 \iff e^x(e^{x^2-x} - 2) \geq 0 \iff e^{x^2-x} \geq 2 = e^{\ln(2)})$$

vale a dire

$$x^2 - x \geq \ln(2) \iff x \geq \frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2} \text{ oppure } x \leq \frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}.$$

d) Si nota che la soluzione $t = \sqrt[3]{x}$ deve risultate positiva, per cui facendo il cambio di variabile si risolve

$$\sqrt{1-\sqrt[3]{x}} \leq \sqrt[3]{x} \iff t = \sqrt[3]{x},\ t \geq 0,\ \sqrt{1-t} \leq t$$

$$\iff t = \sqrt[3]{x},\ t \geq 0,\ t^2 + t - 1 \geq 0 \iff t \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\iff x \geq \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \sqrt{5} - 2$$

e) Come sopra si pone $t = \sqrt[5]{x^2}$, ricordandosi che per avere senso la radice è necessario che $t \leq 1$. D'altra parte si deve anche avere $t \geq 0$. Si svolgono i conti notando che i due membri a dx e sinistra della disuguaglianza sono entrambi sempre positivi

$$\sqrt{1-\sqrt[5]{x^2}} > 1 + \sqrt[5]{x^2} \iff t = \sqrt[5]{x^2},\ 0 \leq t \leq 1,\ 1 - t > 1 + t^2 + 2t \iff$$

$$t = \sqrt[5]{x^2},\ 0 \leq t \leq 1, t(t+3) < 0 \iff t = \sqrt[5]{x^2},\ 0 \leq t \leq 1, -3 < t < 0$$

Le ultime condizioni sono incompatibili per cui l'insieme delle soluzioni è vuoto.

f) La disequazione ha senso solo per $x > 0$. Si ha

$$\log_5(x^{2x}) > \log_3(x^x) \iff 2x\log_5(x) > x\log_3(x) \iff 2\log_5(x) > \log_3(x)$$

$$\iff 2\log_5(3^{\log_3(x)}) > \log_3(x) \iff 2\log_3(x)\log_5(3) > \log_3(x)$$

Bisogna poi distinguere il caso $\log_3(x) \geq 0$ ed il caso $\log_3(x) < 0$, vale a dire $x \geq 1$ oppure $0 < x < 1$

$$\iff 2\log_5(3) > 1,\ x \geq 1 \text{ oppure } 2\log_5(3) < 1,\ 0 < x < 1$$

Si nota che $2\log_5(3) = \log_5(9) > 1 = \log_5(5)$ (log in base 5 è crescente) per cui le le uniche soluzioni sono date dalle x che verificano $x \geq 1$.

3) Calcolare estremo superiore ed inferiore degli insiemi soluzione delle equazioni/disequazioni sopra. Dire se sono massimi o minimi per l'insieme.

Soluzione. *a*) L'insieme soluzione è $\{2\}$ per cui il suo estremo superiore ed inferiore coincidono e sono uguali a 2, coincidente anche con il massimo e minimo dell'insieme.

b) L'insieme soluzione è $(-\infty, 2^{e^{3-\log_2(e)}}]$ per cui il suo estremo superiore è $e^{3-\log_2(e)}$, che è anche massimo, ed il suo estremo inferiore è $-\infty$, ossia l'insieme non ha minimo.

c) L'insieme soluzione è $(-\infty, \frac{1-\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{1+4\ln(2)}}{2}, +\infty)$ per cui il suo estremo superiore è $+\infty$ e quello inferiore è $-\infty$. L'insieme non ha ne' massimo ne' minimo.

d) L'insieme soluzione è $(\sqrt{5}-2, +\infty,)$ per cui il suo estremo superiore è $+\infty$ ed il suo estremo inferiore è $\sqrt{5}-2$. L'insieme non ha ne' massimo ne' minimo.

e) L'insieme soluzione è $\emptyset$. In questo caso sup ed inf non sono definiti ma per convenzione si pone $\inf\emptyset = +\infty$, $\sup\emptyset = -\infty$.

f) L'insieme soluzione è $[1, +\infty,)$ per cui il suo estremo superiore è $+\infty$ ed il suo estremo inferiore è 1 che è anche il suo minimo. L'insieme non ha massimo.

4) Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni:

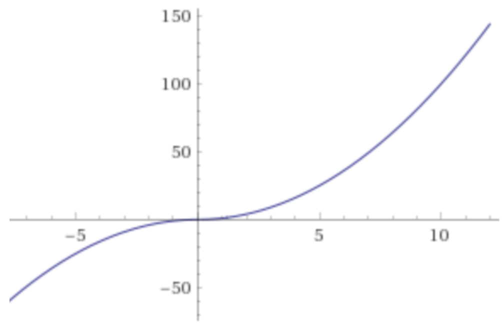
$$a)\ f(x) = x|x|\,; \qquad b)\ f(x) = x|x-2|\,;$$

$$c)\ f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x-1} & x \geq 1 \\ \sqrt{1-x} & x < 1 \end{cases}\,; \quad d)\ f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0 \\ \cos(x) & x < 0 \end{cases}\,;$$

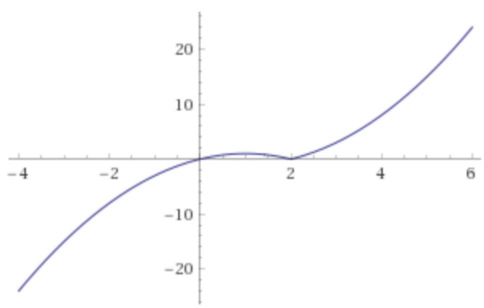
$$e)\ f(x) = \log_{1/2}(1+2x)\,; \qquad f)\ f(x) = \log_{1/3}(3-x)\,.$$

Soluzione.

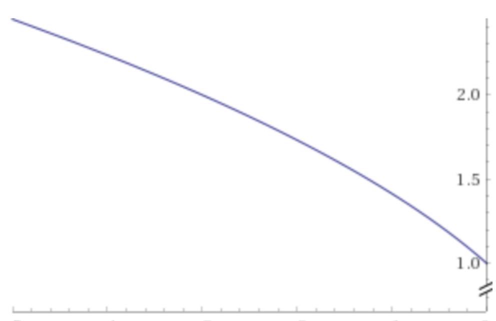
$a)$

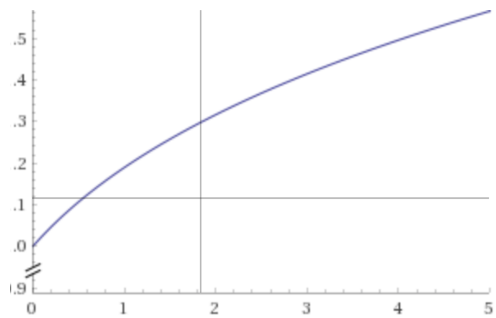


$b)$

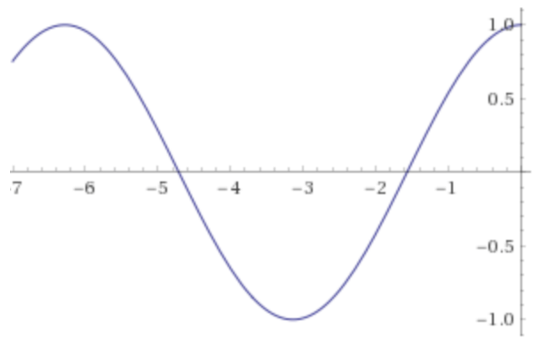


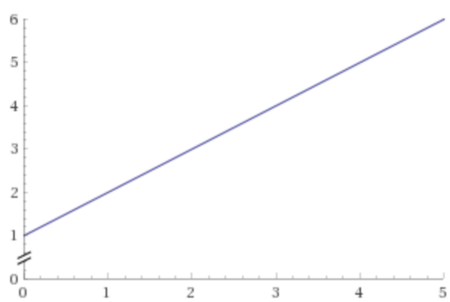
$c)$



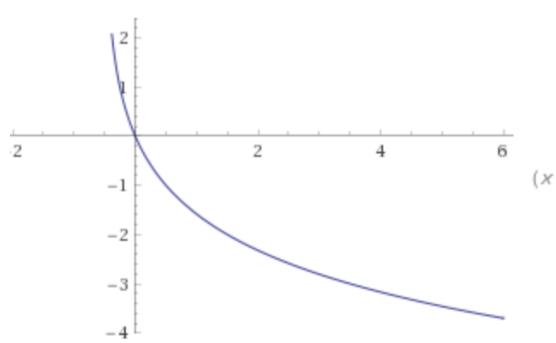

.5
.4
.3
.2
.1
.0
.9
0
1
2
3
4
5

$d)$

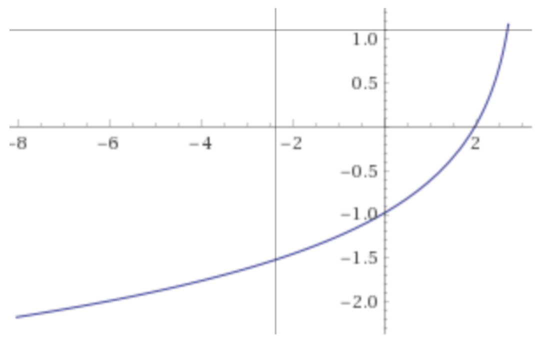

1.0
0.5
7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
−0.5
−1.0


6
5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5

$e)$


2
1
2
2
4
6
(x
−1
−2
−3
−4

$f)$



1.0
0.5
-8
−6
−4
−2
2
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0