Compito di Analisi Matematica, Seconda parte, Tema 1

28 giugno 2019

COGNOME:	NOME:	MATR.:

Esercizio 1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il comportamento dei due integrali

$$(a) \int_0^1 \frac{(\tan(x))^\alpha}{1-\cos(1-e^x)}\,dx; \quad (b) \int_1^{+\infty} \left(\arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right) dx$$

Soluzione. (a) La funzione

$$f(x) = \frac{(\tan(x))^\alpha}{1-\cos(1-e^x)}$$

è continua su $(0,1)$ per cui è anche integrabile in ogni suo sottointervallo. Rimane da vedere cosa accade vicino ad $x=0$.

Dallo sviluppo di Taylor di $e^x = 1 + x + o(x)$ e di $\cos(z) = 1 - \dfrac{z^2}{2} + o(z^2)$ si ha che

$$1-\cos(1-e^x) = 1-\cos(x+o(x)) = \frac{(x+o(x))^2}{2} + o((x+o(x))^2) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \frac{x^2}{2}(1+o(1)).$$

Analogamente si ha

$$(\tan(x))^\alpha = (x+o(x))^\alpha = x^\alpha(1+o(1))$$

Si deduce che

$$f(x) = \frac{(\tan(x))^\alpha}{1-\cos(1-e^x)} \sim \frac{x^\alpha}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{x^{2-\alpha}}$$

ed è noto che questo integrale esiste finito se e solo se $2-\alpha < 1$ vale a dire $\alpha > 1$.

(b) Si sviluppano le funzioni $\arctan(t)$ e $\ln(1+t)$ in $t=0$ come $\arctan(t) = t + o(t^2)$, $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ e si ottiene che

$$\arctan\left(\frac{\alpha}{x}\right) + \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \frac{\beta}{x} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) - \frac{3}{x} + \frac{9}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{\beta-3}{x} + \frac{9}{2x^2} + o\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

L'integrale in esame quindi è composto da un termine armonico divergente con fattore moltiplicativo $\beta - 3$ ed altri termini convergenti. Si deduce che l'integrale converge se e solo se $\beta = 3$, diverge a $+\infty$ se $\beta > 3$, a $-\infty$ se $\beta < 3$.

Esercizio 2. Al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) + \lambda y'(x) + 4y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 0.$$

Stabilire poi per quali λ la soluzione generale è una funzione limitata su $\mathbb{R}$.

Soluzione. Si tratta di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine: le soluzioni dell'omogenea sono ottenute a λ fissato risolvendo $t^2 + \lambda t + 4 = 0$ che ha le soluzioni $\dfrac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 16}}{2}$ se $|\lambda| \geq 4$, le soluzioni $\dfrac{-\lambda \pm i\sqrt{16 - \lambda^2}}{2}$ se $|\lambda| < 4$.

Una soluzione particolare è della forma $C\sin(x) + D\cos(x)$, imponendo che risolva l'equazione si ottiene

$$-C\sin(x) - D\cos(x) + \lambda C\cos(x) - \lambda D\sin(x) + 4C\sin(x) + 4D\cos(x) = \cos(x)$$

da cui $D = \dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$, $C = \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + 9}$, ossia una soluzione particolare è

$$y_p(x) = \frac{3}{\lambda^2 + 9}\cos(x) + \frac{\lambda}{\lambda^2 + 9}\sin(x).$$

La soluzione generale è quindi (al variare di $A, B \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ll} y(x) = y_p(x) + Ae^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2-16}}{2}x} + Be^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2-16}}{2}x} & |\lambda| > 4 \\ y_p(x) + Ae^{-\frac{\lambda}{2}x} + Bxe^{-\frac{\lambda}{2}x} & |\lambda| = 4 \\ y_p(x) + Ae^{-\frac{\lambda}{2}x}\cos(\sqrt{16-\lambda^2}x) + Be^{-\frac{\lambda}{2}x}\sin(\sqrt{16-\lambda^2}x) & |\lambda| < 4 \end{array}$$

definita per $x \in \mathbb{R}$. La soluzione tale che $y(0) = 0$ verifica $A = -B - \dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$ nel primo caso, $A = -\dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$ nel secondo e terzo caso, sempre con B costante generica in $\mathbb{R}$.

La $y_p(x)$ è una funzione limitata per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui ci si concentra sul resto della soluzione. Per comodità riduciamoci al caso $\lambda > 0$ essendo il caso $\lambda < 0$ analogo. Nel primo caso si può raccogliere e vedere che

$$\Big(-B - \frac{3}{\lambda^2 + 9}\Big)e^{\frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2-16}}{2}x} + Be^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2-16}}{2}x} = e^{\frac{-\lambda}{2}x}\Big((-B - \frac{3}{\lambda^2 + 9})e^{-\frac{\sqrt{\lambda^2-16}}{2}x} + Be^{\frac{\sqrt{\lambda^2-16}}{2}x}\Big)$$

per cui la soluzione per $x \to -\infty$ tende a $\pm\infty$ a seconda del segno di B se $B \neq -\dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$, altrimenti per $B = -\dfrac{3}{\lambda^2 + 9}$ la soluzione si riduce, a meno di y_p,è $Be^{\frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2-16}}{2}x}$ che diverge a $-\infty$ per $x \to -\infty$ in quanto $-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 16}$ è sempre un numero negativo.

Nel secondo caso è facile vedere che $\lim_{x \to -\infty}$ di $y(x)$ è $\pm\infty$, a seconda del segno di B; analogamente nel terzo caso esistono successioni del tipo $-2n\pi/\sqrt{16 - \lambda^2}$ lungo cui la $y(x)$ diverge. In particolare y non è mai una funzione limitata su $\mathbb{R}$ se $\lambda \neq 0$. Nel caso $\lambda = 0$ la soluzione è della forma

$$\frac{1}{3}\cos(x) + A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

con $A = -1/3$ ed è sempre limitata.

Esercizio 3.

(1) Determinare tutte le soluzioni complesse z di $z^2 + (1+i)z + i = 0$ e trovarne le radici terze (complesse).

(2) Utilizzare il risultato sopra per risolvere il sistema

$$\begin{cases} w - \bar{w} + |w| = \bar{z}^2 + 1 \\ z^2 + (1+i)z + i = 0 \end{cases}$$

Soluzione. (1) La formula per le soluzioni delle equazioni di secondo grado applicata a $z^2 + (1+i)z + i = 0$ ha il delta uguale a

$$(1+i)^2 - 4i = -2i = 2e^{-i\pi/2},$$

le sue radici complesse sono $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ e $-\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, uguali a $1-i$, $-1+i$. Si deduce quindi che le soluzioni di $z^2 + (1+i)z + i = 0$ sono $(-(1+i) \pm (1-i))/2$ ossia $z_1 = -1, z_2 = -i$. Le loro radici terze sono rispettivamente

$$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_4 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_5 = -1;$$

e

$$z_6 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_7 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_8 = i.$$

(2) La seconda equazione ha le soluzioni $-1, -i$ calcolate sopra. Scegliendo $z = -1$, la prima equazione diventa $2i\mathrm{Im}(w) + |w| = 2$ che è risolta con $\mathrm{Im}(w) = 0$ e $|w| = 2$, ossia $w = 2, -2$. Sostituendo $z = -i$ la prima equazione diventa $2i\mathrm{Im}(w) + |w| = 0$ che è risolta con $\mathrm{Im}(w) = 0$ e $|w| = 0$, ossia $w = 0$. Concludendo le soluzioni (z, w) del sistema sono

$$(-1, 2),\ (-1, -2),\ (-i, 0).$$

Esercizio 4. Data la funzione $\ln\left(\dfrac{2x+5}{x-4}\right)$ determinarne dominio, eventuali asintoti, massimi e minimi locali e zone di convessità.

Soluzione. Il dominio della funzione coincide con gli $x \in \mathbb{R}$ tali che $\dfrac{2x+5}{x-4} > 0$, ossia l'insieme $(-\infty, -5/2) \cup (4, +\infty)$. I limiti di f a $\pm\infty$ valgono $\ln(2)$ e quindi $y = \ln(2)$ l'asintoto orizzontale a $\pm\infty$. I limiti agli estremi finiti del dominio valgono invece

$$\lim_{x\to 4+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to -\frac{5}{2}-} f(x) = -\infty$$

per cui $x = 4$ ed $x = -5/2$ sono i due asintoti verticali.

Le derivate prime e secondo valgono

$$f'(x) = -\frac{13}{(2x+5)(x-4)}, f''(x) = \frac{13(4x-3)}{(2x+5)^{(}x-4)^2}.$$

La funzione è quindi decrescente nel suo dominio con estremo superiore $+\infty$ ed estremo inferiore $-\infty$ senza massimi e minimi locali. La funzione è poi convessa su $(4, +\infty)$ e concava sul rimanente intervallo.